

VI - Elettrostatica nel vuoto

Forza e carica elettrica

La legge di Coulomb asserisce che la forza elettrica tra due cariche puntiformi q_1 e q_2 poste a distanza r_{12} l'una dall'altra nel vuoto è data da:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

con $k =$ costante elettrostatica $= 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

$\epsilon_0 =$ costante dielettrica del vuoto $= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.

Quando sono presenti più cariche elettriche, vale il principio di sovrapposizione:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

La forza esercitata da una distribuzione continua di cariche (volumetrica, superficiale o lineare) su una carica puntiforme è ottenuta integrando gli effetti delle cariche infinitesime che costituiscono la particolare distribuzione.

Il campo elettrico

Una qualunque distribuzione di cariche crea un campo elettrico nello spazio circostante. Considerando una carica di prova q_0 sufficientemente piccola collocata nel campo, il vettore campo elettrico \vec{E} è definito come:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

La forza che agisce su una carica puntiforme q' posta in un dato campo elettrico \vec{E} è:

$$\vec{F} = q' \vec{E}$$

Il campo elettrico generato in un punto P da una singola carica puntiforme q_i nella posizione r_i è:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{i0}^2} \hat{r}_{i0}$$

dove r_{i0} è la distanza tra la carica q_i ed il punto P mentre \hat{r}_{i0} è il versore diretto lungo la congiungente q_i e P ed orientato da q_i a P .

L'intensità del campo elettrico generato da più cariche è data dal principio di sovrapposizione:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Il campo generato da una distribuzione continua di cariche, si ottiene invece per integrazione.

Potenziale elettrico

Il campo generato da una carica puntiforme è centrale e pertanto conservativo; si può dunque introdurre il concetto di differenza di potenziale:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

con \vec{E} campo elettrico creato dalla carica puntiforme e γ una qualunque linea tra A e B immersa nel campo.

Il potenziale elettrico alla distanza r da una carica puntiforme q situata nell'origine è dato da:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

se si assegna il valore zero al potenziale a distanza infinita. Per un sistema di cariche puntiformi, il potenziale è dato da:

$$V = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{i0}}$$

dove la somma è estesa a tutte le cariche ed r_{i0} è la distanza dell' i -esima carica dal punto P dove si deve calcolare il potenziale.

Per una distribuzione continua finita di carica:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r}$$

Se la distribuzione di carica non è finita non si deve usare la formula sopra, perchè in essa è implicito che il potenziale all'infinito è nullo. Si deve pertanto ricorrere alla definizione di differenza di potenziale (p. es. nel caso del piano indefinito uniformemente carico).

Se è noto il potenziale, il campo elettrico può essere determinato tramite:

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\nabla V$$

La legge di Gauss

Il flusso elettrico dovuto al campo elettrico \vec{E} che attraversa una superficie qualsiasi è:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

La legge di Gauss lega il flusso elettrico attraverso una superficie chiusa alla carica totale racchiusa nella superficie stessa:

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

La legge di Gauss è equivalente alla legge di Coulomb per interazioni statiche ma, diversamente dalla legge di Coulomb, vale anche per campi non statici.

La legge di Gauss è anche uno strumento potente per determinare i campi elettrici dovuti a distribuzioni di carica con un elevato grado di simmetria.

I conduttori

1. Il campo elettrostatico all'interno di un conduttore è nullo
2. Il campo elettrostatico immediatamente fuori da un conduttore è perpendicolare alla superficie e assume il valore $\sigma/2\epsilon_0$, dove σ è la densità superficiale di carica locale (che non è necessariamente costante)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u}_n$$

3. Un conduttore, se non presenta cavità non conduttrici contenenti una carica, può avere una carica solo sulla superficie esterna.

Energia potenziale elettrostatica di un sistema di cariche

L'energia potenziale di un sistema di cariche puntiformi è:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

che può essere riscritta come:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i v_i$$

dove v_i rappresenta il potenziale generato nella posizione della carica q_i da tutte le altre cariche. Quando si ha a che fare con un sistema macroscopico continuo si scriverà l'integrale:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(x, y, z) V(x, y, z) d\tau$$

dove $\rho(x, y, z)$ rappresenta la densità di carica, $V(x, y, z)$ rappresenta il potenziale in (x, y, z) , $d\tau$ l'elemento di volume intorno al punto (x, y, z) .

Si può anche scrivere:

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int u_e d\tau$$

dove l'integrale indefinito è esteso a tutto lo spazio e:

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

è la densità di energia elettrostatica.

Condensatori

I condensatori sono dispositivi per l'accumulo di carica elettrica e di energia e consistono tipicamente di due conduttori con cariche uguali ed opposte q (induzione completa).

Indicando con ΔV la differenza di potenziale, la capacità di un condensatore è definita come:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

L'energia potenziale accumulata in un condensatore può essere scritta come:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = C \frac{V^2}{2} = \frac{qV}{2}$$

Condensatori collegati in parallelo equivalgono ad un unico condensatore con capacità:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Condensatori collegati in serie equivalgono ad un unico condensatore con capacità data da:

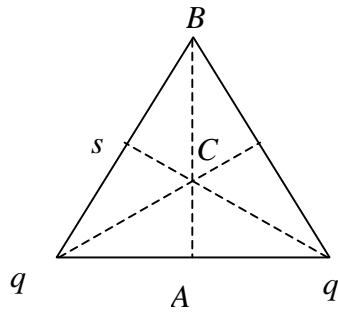
$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Problema 1

Considerate tre cariche positive uguali di valore q poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato s (vedere figura), determinare:

- La forza che agisce sulla carica che si trova nel vertice B .
- Il campo elettrico totale E_0 nel punto medio della base A .
- Il campo elettrico e il potenziale nel punto C in cui si intersecano le bisettrici dei tre angoli del triangolo.

Suggerimento: Si ricordi che per le forze ed i campi elettrici vale il principio di sovrapposizione.



Soluzione:

a) La forza è la risultante di quelle esercitate dalle altre due cariche:

$$F = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = F_1 \sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt{3} F_1 = \sqrt{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2}$$

b) Il campo elettrico in A è dato solo da quello generato dalla carica in B perchè le altre due generano campi uguali ed opposti:

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \vec{j} = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{s^2} \vec{j}$$

dove si è tenuto conto che AB è l'altezza del triangolo equilatero e si è indicato con \vec{j} il versore da A verso B.

c) C è equidistante dalle tre cariche. Il campo elettrico in C è nullo per simmetria, mentre il potenziale è il triplo di quello generato da una sola carica:

$$V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\frac{s}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{s}$$

Ove $s/\sqrt{3}$ è la distanza BC.

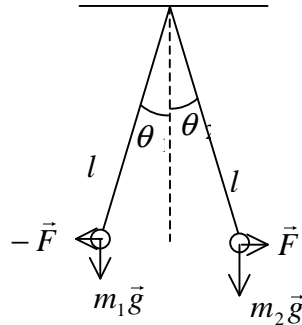
Problema 2

Due piccole sfere cariche sono appese a due corde di ugual lunghezza l (come in figura), che formano due piccoli angoli θ_1 e θ_2 con la verticale.

a) Assumendo per le cariche $q_1 = Q$, $q_2 = 2Q$ e per le masse $m_1 = m_2 = m$, si determini il rapporto θ_1/θ_2 .

- b) Assumendo ancora per le cariche $q_1 = Q$, $q_2 = 2Q$ ma per le masse $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, si ridetermini il rapporto θ_1/θ_2 .
- c) Si determini sia nel caso a) che nel caso b) la distanza d tra le due sfere cariche in funzione delle grandezze note.

Suggerimento: Usare le approssimazioni valide per piccoli angoli.



Soluzione:

La tensione di ciascuna corda bilancia la componente lungo la corda di tutte le altre forze, quindi non resta che bilanciare le componenti ortogonali alla corda della forza di gravità e di quella elettrica agenti su ciascuna carica.

La forza elettrica vale in tutti i casi:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

a) Essendo $m_1 = m_2 = m$, in base alla figura si trova facilmente che:

$$\begin{cases} mg \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ mg \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{cases}$$

cioè:

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = \frac{F}{mg}$$

da cui:

$$\theta_1 = \theta_2$$

b) Essendo $m_1 = m$ ed $m_2 = 2m$, si ha che:

$$\begin{cases} mg \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ 2mg \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{cases}$$

cioè:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} \approx \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = 2$$

ove si è tenuto conto che gli angoli sono piccoli.

c) La distanza è data da:

$$d = l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \approx l(\tan \theta_1 + \tan \theta_2) \approx l(\theta_1 + \theta_2)$$

dunque, per $m_1 = m_2 = m$ è:

$$d \approx 2l \frac{F}{mg} = \frac{2l}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

cioè:

$$d = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{mg} \frac{1}{\pi\epsilon_0}}$$

dunque, per $m_1 = m$ ed $m_2 = 2m$ è:

$$d \approx l \frac{F}{mg} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} l \frac{F}{mg} = \frac{3}{2} \frac{l}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{d^2}$$

cioè:

$$d = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{mg} \frac{3}{4\pi\epsilon_0}}$$

Problema 3

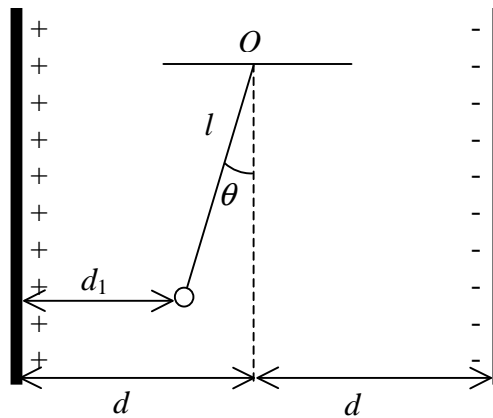
Una sferetta puntiforme di massa m e carica q è sospesa ad un punto O mediante un filo lungo l , in prossimità di una distribuzione piana infinita di cariche con densità superficiale σ (vedere figura).

- d) Calcolare la distanza di equilibrio d_1 della sferetta dal piano carico sapendo che la distanza fra il piano carico ed il punto O è d .
- e) Calcolare la distanza di equilibrio d_2 della sferetta dal piano carico nel caso in cui venga posto un secondo piano con densità superficiale $-\sigma$ in posizione speculare.

f) Come varia d_2 se si raddoppia la distanza del piano carico negativamente dal punto O ?

$$[m = 10 \text{ g}; q = -2 \mu\text{C}; l = 10 \text{ cm}; \sigma = 86,7 \text{ pC/cm}^2; d = 10 \text{ cm}; \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]$$

Suggerimento: la tensione del filo assume qualsiasi valore necessario affinché il filo non si allunghi



Soluzione:

a) La forza elettrica F è orizzontale, mentre il peso è verticale: la loro risultante deve essere diretta lungo il filo, cioè forma un angolo θ con la verticale, cioè con il peso. Dunque:

$$\frac{F}{mg} = \tan \theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{q}{mg} = 1$$

Dalla geometria del problema si ricava:

$$d_1 = d - l \sin \theta = d - l \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = 2,93 \text{ cm.}$$

b) Il campo raddoppia, dunque anche la forza elettrica e la tangente di θ raddoppiano. Quindi:

$$d_2 = d - l \frac{2}{\sqrt{1+4}} = d - l \frac{2}{\sqrt{5}} = 1,06 \text{ cm.}$$

c) Il campo generato da un piano carico indefinito è indipendente dalla distanza. Perciò spostando il piano non cambia nulla.

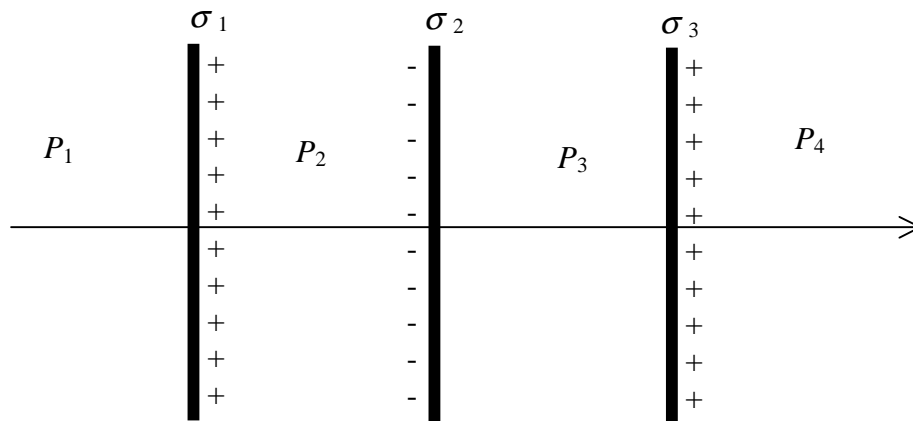
Problema 4

Tre piani indefiniti paralleli sono uniformemente carichi con densità superficiale $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, $\sigma_3 = \sigma$ (vedere figura). Determinare il campo elettrostatico nello spazio esterno ai piani e nelle intercapedini tra i piani.

$$[\sigma = 88,6 \text{ nC/m}^2; d = 10 \text{ cm}; \epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}]$$

Suggerimento: il campo elettrico generato da un piano indefinito uniformemente carico è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \text{ con } \hat{n} \text{ versore normale al piano.}$$



Soluzione:

Prendendo come positivo il verso dell'asse disegnato in figura, basta eseguire le somme algebriche dei campi dei vari piani:

1. In P_1 e P_4 il campo è nullo.

2. In P_2 è:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 10 \text{ kV/m}$$

3. In P_3 è:

$$E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -10 \text{ kV/m}$$

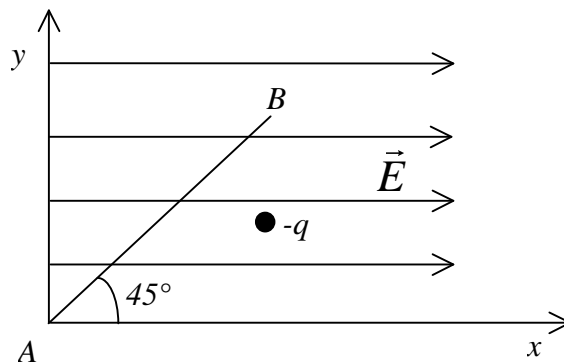
Problema 5

Il campo elettrico \vec{E} è uniforme in tutti i punti del piano (x, y) come in figura.

a) Dimostrare che detto campo è conservativo.

- b) Calcolare la differenza di potenziale fra i punti A e B ed il lavoro compiuto per spostare la carica negativa $-q$ dal punto A al punto B .
- c) Determinare se l'energia potenziale calcolata in A è diversa da quella in B e se $U_A - U_B$ è positivo o negativo.

Suggerimento: per dimostrare che il campo elettrico è conservativo, si può usare sia la condizione di circuitazione nulla, sia quella di rotore nullo.



Soluzione:

a) La forza elettrica \vec{F} è orizzontale e costante, quindi il lavoro è il prodotto di F per la componente orizzontale dello spostamento totale ed è positivo quando ci si sposta nel verso positivo delle x , negativo quando ci si sposta nel verso opposto. Se si calcola la circuitazione, lo spostamento totale è a nullo priori, quindi la circuitazione è nulla. Ergo il campo è conservativo.

b) Detta d la distanza AB , per quanto osservato nel punto a), essendo il potenziale il lavoro per unità di carica, si ricava:

$$V_B - V_A = Ed \cos 45^\circ = \frac{Ed}{\sqrt{2}}.$$

Il lavoro dal punto A al punto B è semplicemente il prodotto della differenza di potenziale per la carica:

$$W_{AB} = -q (V_B - V_A) = -qEd \cos 45^\circ = -\frac{qEd}{\sqrt{2}}.$$

c) Per introdurre l'energia potenziale occorre fissare un'ascissa di riferimento. Prendendo per semplicità quella del punto A , è evidente che, mentre U_A è nulla, U_B è uguale a W_{AB} , quindi negativa.

Pertanto, $U_A - U_B$ è positivo (la carica è negativa).

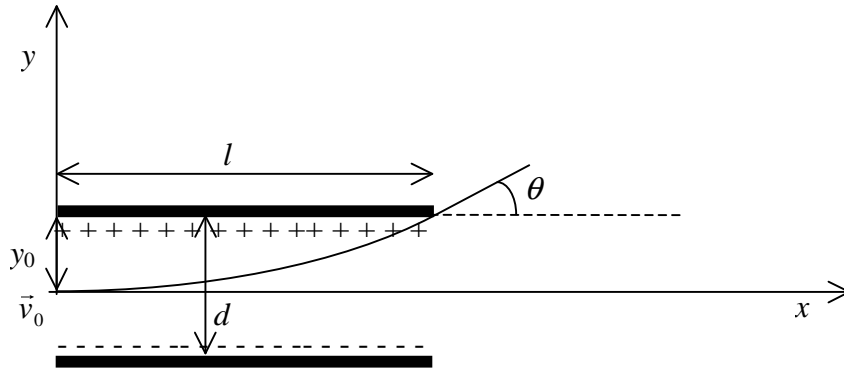
Problema 6

In un tubo catodico, un elettrone è accelerato orizzontalmente da una differenza di potenziale V_c . Dopo aver subito questa accelerazione esso viene fatto passare attraverso due piastre piane parallele orizzontali lunghe l e poste alla distanza d , fra le quali è mantenuta una differenza di potenziale V (figura).

- a) Nel riferimento della figura, qual è il valore di y_0 tale che gli elettroni sfiorino l'estremità della piastra positiva quando escono dalle piastre stesse?
- b) Con quale angolo θ si muovono gli elettroni dopo aver attraversato le piastre?

[$V_c = 20 \text{ kV}$; $V = 200 \text{ V}$; $l = 6 \text{ cm}$; $d = 1 \text{ cm}$; e/m elettrone = $1,7 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$]

Suggerimento: si trascurino la forza di gravità e la velocità dell'elettrone quando parte dal filamento del tubo catodico.



Soluzione:

Le due piastre sono lunghe rispetto alla loro distanza, perciò si può approssimare il campo elettrico fra di esse con quello (uniforme) dovuto a piastre infinite e dato da V/d .

La velocità \vec{v}_0 all'ingresso delle due piastre ($x = 0$) è data dalla conservazione dell'energia nel cannone elettronico:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_c$$

cioè:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m}V_c} = 82,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

con v_0 diretta lungo l'asse x .

a) Il moto fra le due piastre ha la componente x uniforme di velocità \vec{v}_0 e la componente y uniformemente accelerata con accelerazione:

$$a = \frac{e V}{m d}.$$

Perciò y_0 è la distanza percorsa in direzione y nel tempo impiegato a percorrere una distanza l in direzione x :

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{e V}{m d} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 = \frac{V}{V_c} \frac{l^2}{4d} = 0,9 \text{ mm}$$

b) La tangente di θ è data dal rapporto delle componenti della velocità all'uscita dalle piastre. La componente x è ancora v_0 , mentre la componente y è quella raggiunta nel tempo di volo l/v_0 :

$$v_y = \frac{e V l}{m d v_0}$$

Dunque la tangente di θ è:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{e V l}{m d v_0^2} = \frac{V}{2V_c} \frac{l}{d} = 0,03$$

Con un simile valore, θ è circa uguale alla sua tangente.

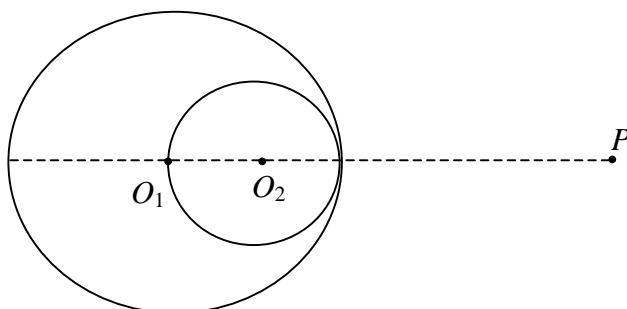
Problema 7

In una sfera uniformemente carica con densità ρ e centro in O_1 , è praticata una cavità sferica di centro O_2 , con superficie tangente alla superficie esterna e passante per O_1 , all'interno della quale c'è il vuoto.

Determinare l'espressione della forza \vec{F} esercitata su una carica puntiforme q posta:

- nel punto P a distanza D da O_1 , rappresentato in figura
- nel centro O_2 della cavità.

Suggerimento: si ricordi che $0 = \rho - \rho$.



Soluzione:

Occorre usare il principio di sovrapposizione con un po' di originalità: come detto nel suggerimento, $0 = \rho + (-\rho)$ vale a dire che la sfera con una cavità vuota è equivalente ad una sfera piena più una cavità riempita di cariche negative di densità uniforme $-\rho$.

a) Per il punto esterno P , le due distribuzioni sferiche sono equivalenti a due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 poste nei loro centri O_1 ed O_2 :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \\ Q_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3 = -\frac{Q_1}{8} \end{cases}$$

Le distanze da P sono ovviamente D e $D - R/2$, per cui la forza richiesta vale:

$$\vec{F} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{D^2} - \frac{1}{8\left(D - \frac{R}{2}\right)^2} \right] \hat{P} = \frac{q}{3\epsilon_0} \rho R^3 \left[\frac{1}{D^2} - \frac{1}{2(2D - R)^2} \right] \hat{P}$$

dove \hat{P} è il versore orientato da O_1 a P .

b) Dentro una sfera di densità di carica costante, il campo elettrico è:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

Ma O_2 è il centro della sfera piccola, quindi c'è solo il campo generato dalla sfera grande, per cui la forza vale:

$$\vec{F} = \frac{\rho q}{6\epsilon_0} R \hat{P}$$

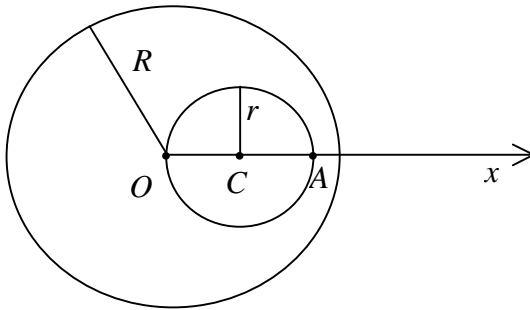
perchè la distanza dei centri è $R/2$.

Problema 8

Si consideri una distribuzione sferica omogenea (raggio R) di cariche positive (carica totale Q), che presenta una cavità sferica (raggio $r = R/4$) come in figura.

Calcolare il campo elettrostatico \vec{E} nei punti O , C , ed A .

Suggerimento: si ricordi la sovrapposizione degli effetti.



Soluzione:

Densità di carica:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{64}\right)} = \frac{48}{63} \frac{Q}{\pi R^3}$$

Per il principio di sovrapposizione, il sistema è equivalente a due sfere piene di densità di carica ρ e raggio R e densità di carica $-\rho$ e raggio r . Dunque nei tre punti richiesti il campo è parallelo all'asse x e:

a) in O :

$$\vec{E} = \frac{-\rho r}{3\epsilon_0} \hat{x} = -\frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

b) in C :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{x} = \frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

c) in A :

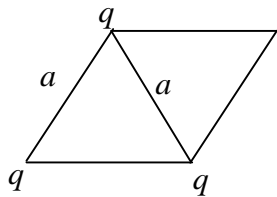
$$\vec{E} = \left(\frac{\rho 2r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) \hat{x} = \frac{4}{21} \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

Problema 9

Tre particelle di carica q sono poste in tre dei vertici di un rombo avente i lati e la diagonale minore di lunghezza a (figura). Determinare:

- l'energia potenziale elettrostatica di questa distribuzione di carica
- il lavoro da compiere sul sistema per portare una quarta particella, pure di carica q , dall'infinito fino al vertice libero del rombo
- il valore del campo elettrico \vec{E} nel quarto vertice.

Suggerimento: si ricordi che il potenziale generato da una carica puntiforme q in un punto P a distanza r dalla carica vale $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, con la condizione $V_\infty = 0$ per $r \rightarrow \infty$.



Soluzione:

- Basta sommare le energie potenziali dovute alle tre coppie di cariche puntiformi:

$$U_e = 3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- E' semplicemente il prodotto della quarta carica per il potenziale generato dalle tre cariche puntiformi nel quarto vertice, cambiato di segno:

$$W = -q \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{3}} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

- Basta sommare vettorialmente i campi dovuti alle tre cariche puntiformi:

$$\vec{E} = \left(2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 3a^2} \right) \hat{d} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{3\sqrt{3} + 1}{3} \hat{d}$$

ove \hat{d} è il versore diretto come la diagonale maggiore, uscente dal vertice carico.

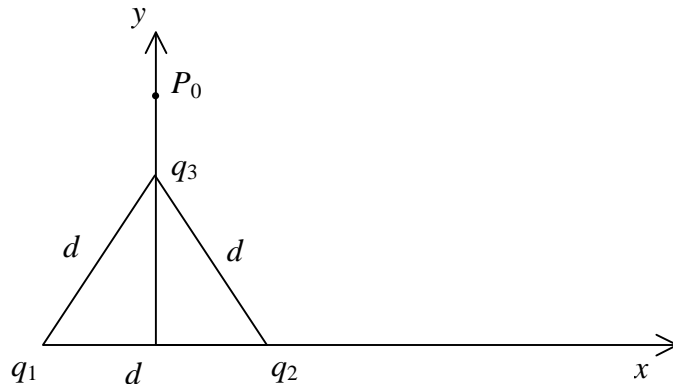
Problema 10

Tre cariche puntiformi sono nei vertici di un triangolo equilatero di lato d . Le cariche q_1 e q_2 sono negative e valgono $q_1 = q_2 = -q$, mentre la carica q_3 è positiva e vale $q_3 = 2q$. Calcolare il potenziale elettrico V_0 nel punto P_0 di coordinate x_0 e y_0 sia direttamente sia nell'approssimazione di dipolo.

[$d = 10$ cm; $q = 1$ μ C; $x_0 = 0$; $y_0 = 40$ cm]

Suggerimento: si ricordi che il potenziale generato da un dipolo a distanza $r \gg d$ vale $V = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,

con \vec{p} momento di dipolo e α angolo formato da \vec{p} e \vec{r} .



Soluzione:

a) Il potenziale elettrico è la somma di quelli generati dalle tre cariche:

$$V_0 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 (y_0 - d)}$$

cioè:

$$V_0 = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(y_0 - d)} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y_0^2}} \right] = 15,3 \text{ kV}$$

b) Il momento di dipolo totale è parallelo all'asse y , e vale:

$$p = qd\sqrt{3} = 1,73 \cdot 10^{-7} \text{ Cm}$$

perchè è la somma di due dipoli uguali diretti come i lati obliqui del triangolo. Il dipolo risultante si può considerare posto nel baricentro geometrico del triangolo $x_b = 0$, $y_b = \frac{d}{2\sqrt{3}} = 2,9$ cm:

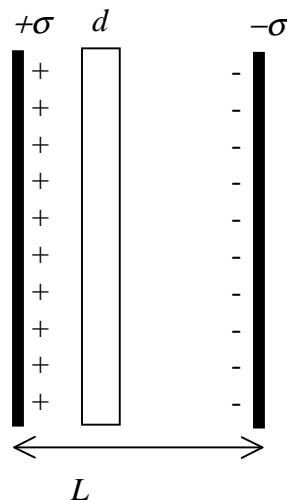
$$V_0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \left(y_0 - \frac{d}{2\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{qd\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0 \left(y_0 - \frac{d}{2\sqrt{3}} \right)^2} = 11,3 \text{ kV}$$

Problema 11

La distanza tra le armature di un condensatore piano carico (densità di carica superficiale σ) disconnesso dalla batteria è L . Una lastra piana conduttrice viene inserita tra le armature del condensatore, parallelamente ad esse (figura). Lo spessore della lastra è $d < L$; la lastra è elettricamente neutra.

- c) Quanto vale la densità di carica indotta sulla superficie della lastra?
- d) Di quanto varia percentualmente la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo che la lastra metallica è stata introdotta?

Suggerimento: si ricordi la formula dei condensatori collegati in serie.



Soluzione:

a) La densità di carica è $+\sigma$ sulla faccia della lastra rivolta verso l'armatura negativa, $-\sigma$ sull'altra faccia.

b) Dobbiamo confrontare la differenza di potenziale di un condensatore di capacità:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{L}$$

dove S è la superficie di un'armatura, con la differenza di potenziale di una serie di due condensatori (caricati con la stessa carica di quello originario) di capacità

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{L_1} \text{ e } C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{L_2}$$

rispettivamente (L_1 e L_2 sono ovviamente le larghezze dei due condensatori).
La capacità serie è:

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S}{L_1 + L_2}$$

con la condizione $L_1 + L_2 = L - d$.

Dunque:

$$\frac{\Delta V_s - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\frac{q}{C_s} - \frac{q}{C}}{\frac{q}{C}} = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{L} - \frac{\epsilon_0 S}{L-d}}{\frac{\epsilon_0 S}{L-d}} = -\frac{d}{L}$$

vale a dire che la differenza di potenziale diminuisce in percentuale sul valore iniziale.

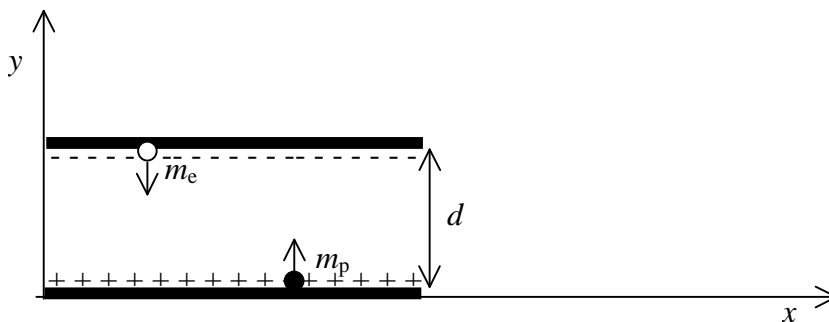
Problema 12

Tra le armature di un condensatore piano è applicata una differenza di ΔV . La distanza tra le armature è d . Nell'istante in cui un elettrone (massa m_e) si stacca, con velocità iniziale nulla, dall'armatura di carica negativa, un protone (massa m_p) si stacca, con velocità iniziale pure nulla, da quella di carica positiva (figura). Determinare:

- c) il rapporto tra le velocità delle due particelle quando urtano le armature
- d) a quale distanza y dall'armatura positiva le due cariche si incrociano.

$$[V = 1600 \text{ V}; d = 4 \text{ cm}; m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}]$$

Suggerimento: si trascurino la forza di gravità e l'interazione tra le cariche.



Soluzione:

Campo elettrico:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Accelerazioni:

$$a_e = \frac{-e}{m_e} E = -\frac{e}{m_e} \frac{\Delta V}{d}$$

per l'elettrone, e:

$$a_p = \frac{e}{m_p} E = \frac{e}{m_e} \frac{\Delta V}{d}$$

per il protone.

a) Applicando la formula che lega la velocità di un moto rettilineo uniformemente accelerato alla posizione, si ha:

$$\begin{cases} v_e = \sqrt{2a_e d} \\ v_p = \sqrt{2a_p d} \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{a_e}{a_p}} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 42.8$$

b) Equazioni del moto delle due particelle:

$$\begin{cases} y_e = \frac{1}{2} a_e t^2 + d \\ y_p = \frac{1}{2} a_p t^2 \end{cases}$$

Le particelle si incrociano quando $y_e = y_p$, cioè:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_p - a_e}}; y_p = \frac{1}{2} a_p \frac{2d}{a_p - a_e} = \frac{a_p}{a_p - a_e} d = \frac{m_e}{m_p + m_e} d = 22 \mu\text{m}.$$