

V - Meccanica rotazionale del corpo rigido

Un corpo rigido può ruotare oltre che traslare. Il moto traslatorio è descritto specificando quello del centro di massa.

Rotazione intorno ad un asse fisso.

Quando un corpo rigido (idealizzato come un insieme di punti materiali le cui mutue distanze sono fisse) ruota intorno ad un asse fisso, ogni suo punto è fermo rispetto agli altri. Pertanto le rotazioni intorno ad un asse fisso si possono descrivere mediante un solo angolo θ : Se un punto ruota di θ , gli altri sono costretti a ruotare dello stesso angolo.

Di conseguenza, tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità angolare:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e la stessa accelerazione angolare:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Sia $\vec{\omega}$ che $\vec{\alpha}$ sono vettori con la direzione dell'asse di rotazione (preso di solito come asse z) ed il verso dato dalla regola della mano destra.

Si definisce momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione la grandezza:

$$I = \sum m_i R_i^2$$

dove R_i è la distanza dall'asse del punto m_i .

La definizione può essere estesa ad un corpo continuo:

$$I = \int_M R^2 dm$$

Uno strumento utile per la valutazione del momento d'inerzia è il teorema di Huygens-Steiner (o dell'asse parallelo). Questo teorema afferma che il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse qualsiasi è dato da:

$$I = I_{CM} + Md^2$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo a quello dato e passante per il centro di massa, M la massa del corpo a d la distanza tra i due assi.

Il momento angolare (o momento della quantità di moto) L_z di un corpo in rotazione attorno all'asse fisso z è dato da:

$$L_z = I_z \omega$$

Per rotazioni di un corpo rigido simmetrico attorno ad un asse di simmetria, il momento angolare è:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Quando un corpo rigido ruota attorno ad un asse che non è di simmetria, il momento angolare \vec{L} può non essere parallelo e concorde rispetto alla velocità angolare $\vec{\omega}$ nel qual caso il corpo è in una condizione di squilibrio dinamico e la direzione del momento angolare \vec{L} varia nel tempo (anche se $\vec{\omega}$ è costante: è questo il caso della precessione di \vec{L}).

Il teorema del momento angolare (2^a equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti) è, nella forma più semplice:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(E)}$$

con $\vec{M}^{(E)}$ momento totale delle forze esterne calcolato rispetto al polo O . Anche \vec{L} è calcolato rispetto allo stesso polo. Il polo O deve essere fisso rispetto al riferimento scelto.

Nei moti di rotazione attorno ad un asse fisso il concetto di forza è letteralmente sostituito da quello di momento della forza, quello di massa dal momento d'inerzia, e l'accelerazione è quella angolare. Tra queste grandezze vige infatti un'analogia relazione che lega forza, massa ed accelerazione:

$$M_z^{(E)} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha$$

Se $M_z^{(E)}$ è costante, allora anche α è costante e le equazioni del moto rotatorio divengono:

$$\begin{cases} \alpha = \text{costante} \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{cases}$$

e:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

dove ω_0 e θ_0 sono i valori iniziali ($t = t_0 = 0$) della velocità angolare e dell'angolo che definisce la posizione iniziale. Queste equazioni sono analoghe a quelle del moto rettilineo uniforme in una dimensione.

L'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso z è:

$$E_c = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

mentre il lavoro fatto dal momento $\vec{M}^{(E)}$ assume la forma:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z^{(E)} d\theta$$

Se $M_z^{(E)}$ è costante, allora: $W = M_z^{(E)}(\theta - \theta_0)$

Il teorema lavoro – energia è dato da:

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z^{(E)} d\theta = E_c - E_{c0}$$

Se il momento risultante delle forze agenti sul corpo è nullo, cioè $d\vec{L}/dt = 0$, allora:

$$\vec{L} = \text{costante.}$$

Questa è la legge di conservazione del momento angolare per un corpo in rotazione. Se il momento d'inerzia è costante (come per un singolo corpo rigido) la conservazione del momento angolare equivale all'affermazione che la velocità angolare $\vec{\omega}$ è costante nel tempo.

Per sistemi più complessi, in cui il momento d'inerzia può variare (basta che ci siano due corpi rigidi interagenti), la conservazione del momento angolare è uno strumento potente nella soluzione di problemi e può caratterizzare il sistema dinamico ad ogni istante.

Il momento risultante delle forze esterne

$$\vec{M}^{(E)} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)})$$

sarà automaticamente nullo per i sistemi isolati, ma può essere nullo anche quando $\vec{F}^{(E)} \neq 0$, essendo in tal caso essenziale la scelta del polo rispetto al quale si calcolano i momenti delle forze.

Rototraslazione senza strisciamento.

Nel rotolamento il moto traslatorio è combinato con quello rotatorio. Oggetti con raggio r che rotolano senza strisciare hanno la velocità angolare ω e la velocità del centro di massa v_{CM} legate dalla relazione:

$$v_{CM} = r\omega$$

L'energia cinetica di un corpo che rotola senza strisciare è la somma della sua energia cinetica rotazionale attorno all'asse di rotazione baricentrico e di quella traslazionale del centro di massa:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_{CM} + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

Statica del corpo rigido.

La statica può essere vista come un caso limite della dinamica: quello in cui "tutto è fermo", anche se ci sono forze.

Le condizioni da applicare sono quindi due:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(E)} = 0 \quad \text{per non avere moti di traslazione}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = 0 \quad \text{per sopprimere le rotazioni}$$

Per applicare queste condizioni è necessario conoscere non solo le forze esterne, ma anche i loro punti di applicazione. La gravità agisce come se fosse applicata al centro di massa del corpo rigido. Il polo rispetto al quale si calcolano i momenti delle forze deve essere scelto con cura, onde semplificare al massimo la risoluzione del problema. Conviene anche scegliere un riferimento cartesiano opportuno: alle due equazioni vettoriali dell'equilibrio corrispondono sei equazioni scalari.

Problema 1

Determinare le lunghezze dei pendoli semplici aventi medesimo periodo di oscillazione di due pendoli composti quadrati di lato l e vincolati a ruotare attorno all'asse orizzontale passante per il punto medio di uno dei lati e perpendicolare a questo lato.

I due quadrati sono formati:

uno da quattro masse puntiformi uguali collocate nei vertici ed unite da asticelle rigide di massa trascurabile

l'altro da quattro aste rigide omogenee ed uguali.

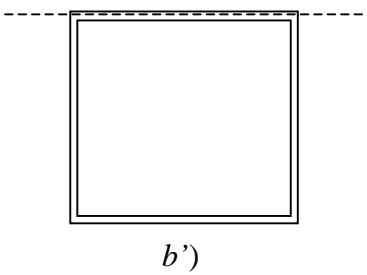
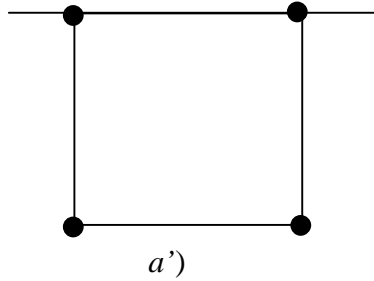
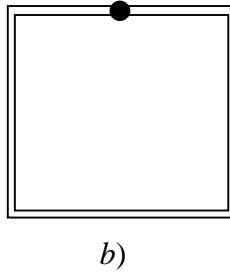
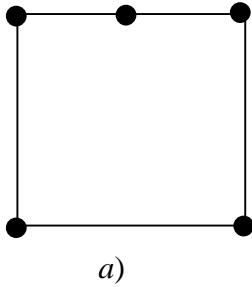
Come cambierebbero i risultati se i pendoli fossero vincolati a ruotare attorno ad uno dei lati del quadrato?

Indicare con m la massa totale del pendolo.

Suggerimento: il periodo di un pendolo composto è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}}$$

con I_p momento d'inerzia del pendolo rispetto all'asse di oscillazione e d distanza del centro di massa dall'asse.



Soluzione:

Asse perpendicolare al piano del foglio (fig. a) e b)):

detti I_p il momento d'inerzia delle masse puntiformi e I_c quello delle aste omogenee, si trova:

$$\begin{cases} I_p = \frac{m}{4} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} l^2 + \frac{5}{4} l^2 \right] = \frac{3}{4} m l^2 \\ I_c = 4 \left(\frac{m l^2}{4 \cdot 12} + \frac{m l^2}{4 \cdot 4} \right) + m \frac{l^2}{4} = \frac{7}{12} m l^2 \end{cases}$$

Per la valutazione di I_c si è prima calcolato il momento d'inerzia rispetto al centro di massa e poi si è utilizzato il teorema dell'asse parallelo.

Il braccio della forza peso è la distanza d del centro di massa dall'asse:

$$d = \frac{l}{2}$$

Il periodo del pendolo è:

$$\begin{cases} T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{3l}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_p}{g}} \\ T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{7l}{6g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_c}{g}} \end{cases}$$

con T_p, T_c, l'_p, l'_c periodi e lunghezze dei pendoli semplici equivalenti.
Quindi:

$$\begin{cases} l'_p = \frac{3l}{2} \\ l'_c = \frac{7l}{6} \end{cases}$$

Asse orizzontale passante per il punto medio di uno dei lati (fig. a') e b')):

detti I_p il momento d'inerzia delle masse puntiformi e I_c quello delle aste omogenee, si trova:

$$\begin{cases} I_p = 2 \frac{m}{4} l^2 = \frac{1}{2} m l^2 \\ I_c = 2 \left(\frac{m}{4} \frac{l^2}{12} + \frac{m}{4} \frac{l^2}{4} \right) + m \frac{l^2}{4} = \frac{5}{12} m l^2 \end{cases}$$

Per la valutazione di I_c si è prima calcolato il momento d'inerzia rispetto al centro di massa e poi si è utilizzato il teorema dell'asse parallelo.

Il braccio della forza peso è la distanza d del centro di massa dall'asse:

$$d = \frac{l}{2}$$

Il periodo del pendolo è:

$$\begin{cases} T_p = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_p}{g}} \\ T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_c}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{5l}{6g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l'_c}{g}} \end{cases}$$

con T_p, T_c, l'_p, l'_c periodi e lunghezze dei pendoli semplici equivalenti. Quindi:

$$\begin{cases} l'_p = l \\ l'_c = \frac{5l}{6} \end{cases}$$

Problema 2

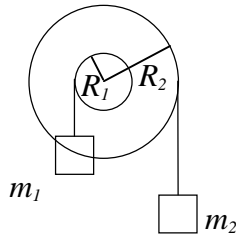
Due corpi sono appesi mediante fili ideali a due pulegge solidali fra loro e girevoli attorno ad un asse comune, come illustrato in figura. Il momento d'inerzia complessivo è I ed i raggi dei dischi sono R_1 ed R_2 . I fili non slittano nelle gole delle pulegge.

a) nota m_1 , si trovi m_2 tale che il sistema sia in equilibrio

b) posta delicatamente una massa m_3 sopra m_1 , si trovino l'accelerazione angolare dei dischi e le tensioni dei fili.

$$[m_1 = 24 \text{ kg}; m_3 = 12 \text{ kg}; R_1 = 1,2 \text{ m}; R_2 = 0,4 \text{ m}; I = 40 \text{ kgm}^2]$$

Suggerimento: utilizzare i momenti delle forze.



Soluzione:

a) La condizione di equilibrio è:

$$m_1 g R_1 = m_2 g R_2$$

da cui:

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 72 \text{ kg.}$$

b) Le equazioni del moto del sistema dopo l'aggiunta di m_3 sopra m_1 , sono:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 = I \alpha \\ \alpha = \frac{a_1}{R_1} = \frac{a_2}{R_2} \end{cases}$$

cioè, eliminando le accelerazioni lineari:

$$\begin{cases} T_1 + (m_1 + m_3)R_1 \alpha = (m_1 + m_3)g \\ T_2 - m_2 R_2 \alpha = m_2 g \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 - I \alpha = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{(m_1 + m_3)(m_2 R_2^2 + m_2 R_2 R_1 + I)}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} g = 294 \text{ N} \\ T_2 = \frac{(m_1 + m_3)(R_1 R_2 + R_1^2) + I}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} m_2 g = 745 \text{ N} \\ \alpha = \frac{(m_1 + m_3)R_1 - m_2 R_2}{(m_1 + m_3)R_1^2 + m_2 R_2^2 + I} g = 1,4 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

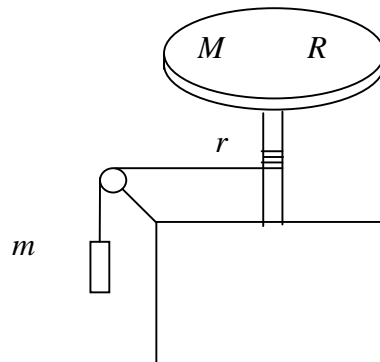
Problema 3

Una ruota di Prandtl (figura) è formata da un disco di raggio R e massa M e da un cilindro di raggio r e momento d'inerzia trascurabile rispetto all'asse di rotazione. Non c'è attrito ed il filo inestensibile non slitta sull'albero. All'istante $t = 0$, la massa m , inizialmente in quiete, viene lasciata scendere.

- Calcolare il tempo t_0 affinché la massa m percorra l'altezza h .
- Calcolare il numero corrispondente di giri compiuti dalla ruota.
- Sul bordo della ruota è attaccato un magnetino di massa m_0 e dimensioni trascurabili che esercita una forza F sul disco. Verificare se al tempo t_0 il magnetino è ancora attaccato al disco.

[$M = 0,5 \text{ kg}$; $R = 0,2 \text{ m}$; $r = 2 \text{ cm}$; $m = 1 \text{ kg}$; $h = 2 \text{ m}$; $m_0 = 0,01 \text{ kg}$; $F = 5 \text{ N}$]

Suggerimento: il momento d'inerzia del magnetino è trascurabile. Quando la ruota è in rotazione sul magnetino agisce la forza centrifuga.



Soluzione:

- Momento d'inerzia I della ruota di Prandtl:

$$I = MR^2 = 0,01 \text{ kgm}^2$$

Equazioni del moto del sistema (a = accelerazione di m , T = tensione del filo, α = accelerazione angolare):

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr = I\alpha \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases}$$

Eliminando l'accelerazione angolare e la tensione del filo:

$$mgr = mar + I \frac{a}{r}$$

cioè:

$$a = \frac{mr^2}{mr^2 + I} g$$

Dunque:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{mr^2 + I}{mr^2}} = 3,2 \text{ s}$$

b) Il numero di giri n è fornito da un puro calcolo geometrico:

$$n = \frac{h}{2\pi r} = 15,9 \text{ giri.}$$

c) Il momento d'inerzia del magnetino è trascurabile rispetto a quello della ruota di Prandtl, quindi non ne altera la velocità di rotazione. Perciò, la forza centrifuga agente sul magnetino è:

$$m_0 \omega^2 R = m_0 \frac{(at_0)^2}{R} = 7,5 \text{ N}$$

per cui il magnetino si è già staccato. Si può usare anche la conservazione dell'energia:

$$\begin{cases} m_0 gh = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} \\ F = m_0 \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

cioè:

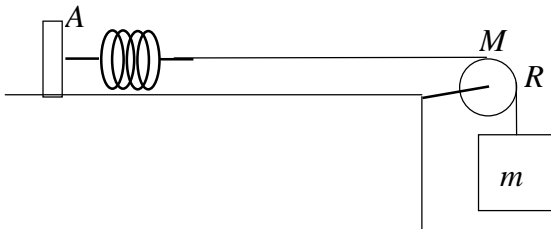
$$F = m_0 \frac{2m_0 ghr}{m_0 r^2 + I} = 7,5 \text{ N}$$

Problema 4

Nel sistema indicato in figura la molla, di massa trascurabile, ha costante elastica k ; la carrucola, costituita da un cilindro omogeneo di massa M e raggio R , ruota senza attrito attorno all'asse O disposto orizzontalmente. Il filo che collega la molla, un cui estremo è fissato A , alla massa m , è inestensibile, di massa trascurabile e non slitta sulla carrucola.

- Calcolare l'allungamento x_0 della molla in condizioni di equilibrio.
- Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della massa m nel suo moto verticale.

Suggerimento: scrivere l'equazione del moto verticale della massa m e quella della rotazione del cilindro intorno all'asse fisso.



Soluzione:

Detto x lo scostamento della molla dalla posizione di equilibrio (che è anche l'allungamento della molla), positivo verso il basso, si ha:

$$\begin{cases} mg - T(x) = m\ddot{x} \\ [T(x) - kx]R = I\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} (mg - m\ddot{x} - kx)R = I \frac{\ddot{x}}{R} \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases}$$

Questa è l'equazione dell'oscillatore armonico forzato:

$$\frac{M + 2m}{2}\ddot{x} + kx = mg$$

a) All'equilibrio $\ddot{x} = 0$, per cui:

$$x_0 = \frac{mg}{k}$$

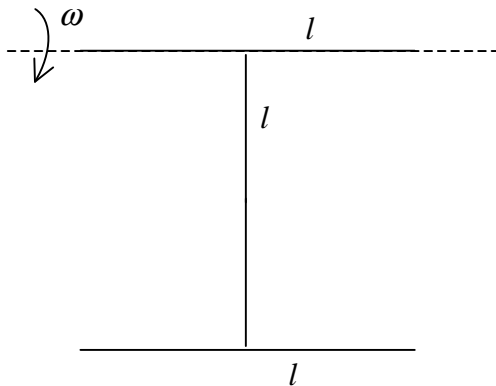
b) La soluzione è data dalla somma dell'oscillazione libera e della soluzione all'equilibrio x_0 . Il periodo è perciò lo stesso dell'oscillatore libero:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m + M}{2k}}$$

Problema 5

Un corpo rigido è costituito da tre sbarrette sottili identiche di massa m e lunghezza l , collegate fra loro a formare una H (figura). Il corpo può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per una delle gambe della H. Partendo da fermo con la H in un piano orizzontale, il corpo ruota sotto l'azione della forza peso. Determinare la velocità angolare del corpo nel momento in cui il piano dell'H è verticale.

Suggerimento: calcolare il momento d'inerzia totale.



Soluzione:

Il braccio della forza gravitazionale è la distanza del centro di massa dall'asse, che, essendo il corpo omogeneo, coincide con il centro geometrico e vale perciò $l/2$.
Detto I il momento d'inerzia, vale:

$$I = \frac{1}{3} ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$$

Allora la conservazione dell'energia si scrive:

$$3mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \frac{4}{3} ml^2 \omega^2$$

cioè:

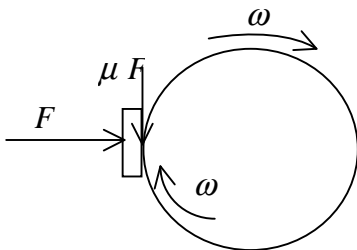
$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Problema 6

Una ruota di massa m e raggio r è assimilabile ad un disco omogeneo e ruota senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse fisso passante per il suo centro con una velocità angolare ω . Per fermare la ruota, si preme un pattino contro il suo bordo esercitando una forza radiale F . Se prima di fermarsi la ruota compie n giri, qual è il coefficiente d'attrito μ , fra il pattino ed il bordo della ruota?

[$m = 1,4$ kg; $r = 23,0$ cm; $\omega = 840$ giri/min; $F = 130,0$ N; $n = 2,8$]

Suggerimento: Calcolare il lavoro della forza di attrito e uguagliarlo alla variazione di energia cinetica della ruota.



Soluzione:

Teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \mu F r 2\pi n$$

Dove I è il momento d'inerzia della ruota. Quindi:

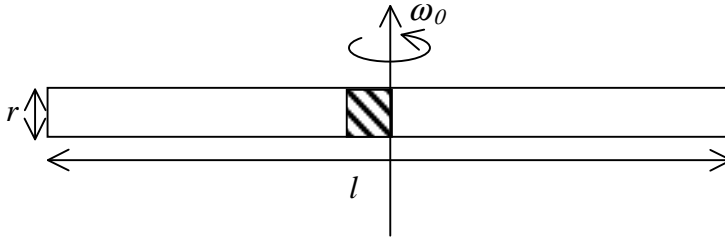
$$\mu = \frac{I \omega^2}{4\pi n F r} = \frac{m r \omega^2}{8\pi n F} = 0,27$$

Problema 7

Un sottile tubo rigido ed omogeneo, di massa M , ha al suo centro un cilindretto molto corto di massa m (da considerarsi puntiforme) e diametro appena inferiore a quello del tubo. Il cilindretto può scorrere senza attrito dentro al tubo. Inizialmente il sistema ruota senza attrito con velocità angolare ω_0 intorno ad un asse verticale baricentrico. Ad un certo momento, per una lievissima perturbazione (vedere figura), il cilindretto si sposta dalla posizione iniziale e viene espulso dal

tubo. In assenza di forze esterne, qual è la velocità angolare ω del tubo, quando il cilindretto fuoriesce?

Suggerimento: Il momento d'inerzia del tubo sottile rispetto ad un diametro centrale può essere assimilato a quello di una sbarretta rigida.



Soluzione:

Conservazione del momento angolare:

$$I\omega_0 = \left(I + m \frac{l^2}{4} \right) \omega$$

Dove I è il momento d'inerzia del tubo:

$$I = \frac{Ml^2}{12}$$

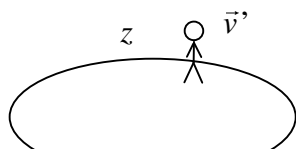
Ma allora:

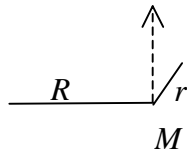
$$\omega = \frac{I\omega_0}{I + m \frac{l^2}{4}} = \frac{M}{M + 3m} \omega_0$$

Problema 8

Su una piattaforma circolare omogenea inizialmente ferma in posizione orizzontale di massa M e raggio R , girevole senza attrito attorno all'asse verticale centrale z , sta fermo a distanza r dal centro un uomo di massa m (vedi figura). Ad un certo istante l'uomo comincia a correre lungo la circonferenza di raggio r con velocità \vec{v}' rispetto alla piattaforma. Determinare la velocità angolare ω con cui ruota la piattaforma.

Suggerimento: ω è chiaramente misurata in un riferimento inerziale.





Soluzione:

Detta ω_u la velocità angolare dell'uomo in un riferimento inerziale, vale:

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{r} \times (\vec{\omega}_u - \vec{\omega}) \\ mr^2 \omega_u - \frac{1}{2} MR^2 \omega = 0 \end{cases}$$

con $\vec{\omega}$ ed $\vec{\omega}_u$ di verso opposto. Passando ai moduli nella prima equazione:

$$\begin{cases} v' = r(\omega_u + \omega) \\ mr^2 \omega_u - \frac{1}{2} MR^2 \omega = 0 \end{cases}$$

Da ciò si ottiene:

$$\omega = \frac{mrv'}{\left(mr^2 + \frac{1}{2} MR^2 \right)}$$

Problema 9

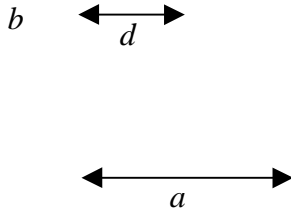
La porta rettangolare mostrata in figura ha massa M , lati di lunghezza a e b ed è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno al lato maggiore b . La porta, inizialmente ferma, viene colpita orizzontalmente da un proiettile di massa m e dimensioni trascurabili, ad una distanza d dal suo asse di rotazione. La velocità del proiettile prima dell'urto è v ed esso si conficca nella porta. Sapendo che il momento delle forze d'attrito vale M_f , determinare:

- La velocità angolare ω con cui la porta ruota subito dopo l'urto.
- L'angolo totale di rotazione θ della porta dovuto all'urto.

$$[M = 2 \text{ kg}; a = 1,5 \text{ m}; b = 2 \text{ m}; m = 50 \text{ g}; d = \frac{2}{3} a; v = 30 \text{ m/s}; M_f = \frac{1}{3} \text{ Nm}]$$

Suggerimento: il momento d'inerzia della porta rispetto ad un asse parallelo a quello specificato e passante per il baricentro vale $I_0 = \frac{1}{12} Ma^2$.





Soluzione:

Momento d'inerzia iniziale della porta rispetto all'asse b :

$$I_i = I_0 + M \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M a^2$$

Momento d'inerzia finale (dopo l'urto) della porta rispetto all'asse b :

$$I_f = I_0 + M \left(\frac{2a}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} (3M + 4m) a^2$$

a) Conservazione del momento angolare:

$$mv \frac{2}{3} a = I_f \omega$$

cioè:

$$\omega = mv \frac{2a}{3I_f} = \frac{6mv}{a(3M + 4m)} = 0,97 \text{ rad/s}$$

b) Teorema dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2} I_f \omega^2 = M_f \theta$$

Vale a dire:

$$\theta = \frac{I_f \omega^2}{2M_f} = \frac{2m^2 v^2}{(3M + 4m)M_f} = 2,18 \text{ rad}$$

Problema 10

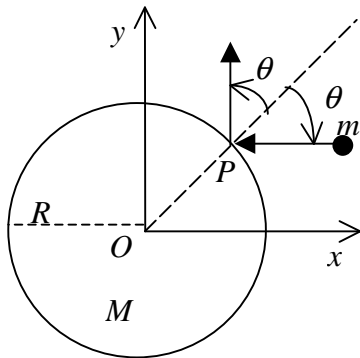
Un disco omogeneo di massa M e raggio R , inizialmente fermo, è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso z orizzontale passante per il suo centro O . Un proiettile puntiforme di massa m viene lanciato con velocità v_0 (nel piano del disco) contro il disco, e lo urta in un punto P

individuato da un angolo θ . In seguito all'urto il proiettile rimbalza con velocità v'_0 in una direzione che forma con la radiale in P il medesimo angolo θ . Poiché l'urto sia elastico, determinare:

- c) La velocità angolare ω del disco dopo l'urto.
 d) il rapporto fra la massa del proiettile m e quella del disco M .

[$R = 30 \text{ cm}$; $v_0 = 30 \text{ m/s}$; $\theta = 60^\circ$; $v'_0 = 2 \text{ m/s}$]

Suggerimento: Il sistema è formato da disco più proiettile, perciò scegliere come polo il punto O e tener conto del momento angolare del proiettile.



Soluzione:

I principi di conservazione del momento angolare e dell'energia sono:

$$\begin{cases} Rm \sin \theta (v_0 - v'_0) = I\omega \\ \frac{1}{2} m (v_0^2 - v'^2_0) = \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases}$$

a) Il rapporto delle due equazioni non contiene le masse:

$$\omega = \frac{v_0 + v'_0}{R \sin \theta} = 46,2 \text{ rad/s}$$

b) Nota ω , il rapporto delle masse si ottiene facilmente da una delle due equazioni di partenza:

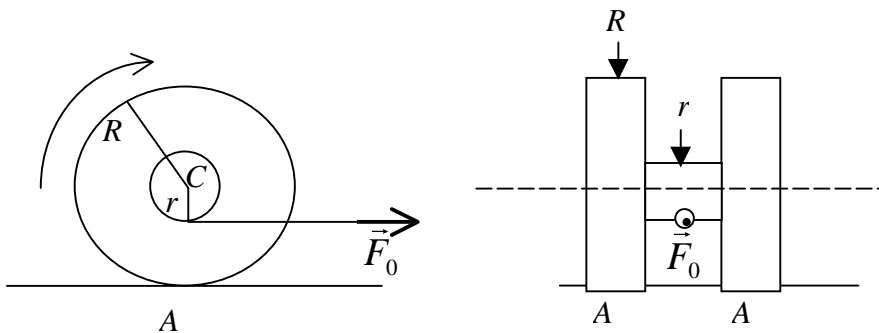
$$\frac{m}{M} = \frac{R\omega}{2 \sin \theta (v_0 - v'_0)} = \frac{v_0 + v'_0}{2 \sin^2 \theta (v_0 - v'_0)} = 1$$

Problema 11

Un rocchetto omogeneo di massa M raggio di gola r e raggio esterno R rotola senza strisciare su un piano orizzontale. L'asse AA è l'asse di istantanea rotazione (figura). Al filo avvolto sul rocchetto è applicata una forza costante \vec{F}_0 orizzontale, che si pensa situata sempre nel piano verticale passante per il centro di massa C del rocchetto. Trovare quanto valgono:

- l'accelerazione \vec{a}_c del centro di massa;
- la forza di attrito radente \vec{F}_a complessiva sul rocchetto (è attrito statico o dinamico?);
- l'accelerazione angolare del rocchetto;
- dire se il filo si avvolge o si svolge e perchè.

Suggerimento: Calcolare il momento d'inerzia totale del rocchetto.



Soluzione 1:

Equazioni del moto del centro di massa e della rotazione attorno al centro di massa:

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{F}_a = M\vec{a}_c \\ \vec{r} \times \vec{F}_0 + \vec{R} \times \vec{F}_a = \frac{1}{2}MR^2\vec{\alpha} \end{cases}$$

Cioè, scelto come verso positivo dell'asse di rotazione quello entrante nel foglio:

$$\begin{cases} F_0 - F_a = Ma_c \\ -rF_0 + RF_a = \frac{1}{2}MRa_c \end{cases}$$

Nella seconda equazione si è usata la condizione $a_c = R\alpha$ (rotolamento senza strisciamento). Risolvendo il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} a_c = \frac{2}{3} \frac{R-r}{MR} F_0 \\ F_a = \frac{2r+R}{3R} F_0 \end{cases}$$

Le risposte ai quesiti a) e b) si ottengono aggiungendo che \vec{a}_c è parallela a \vec{F}_0 , mentre \vec{F}_a è antiparallela a \vec{F}_0 . Inoltre l'attrito è statico, altrimenti il rocchetto striscerebbe.

c) L'accelerazione angolare è data dalla condizione di rotolamento senza strisciamento:

$$\alpha = \frac{a_c}{R}$$

d) Il filo si arrotola, perchè deve rimanere teso mentre il rocchetto rotola senza strisciare.

Soluzione 2:

Traslazione del centro di massa e rotazione attorno al punto di contatto:

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{F}_a = M\vec{a}_c \\ (-\vec{r} + \vec{R}) \times \vec{F}_0 = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) \vec{\alpha} \end{cases}$$

Per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse di contatto, si è usato il teorema di Huygens-Steiner. Orientando l'asse di rotazione nello stesso verso della soluzione 1 ed impiegando ancora una volta la condizione di rotolamento senza strisciamento $a_c = R\alpha$, si ricava:

$$\begin{cases} F_0 - F_a = Ma_c \\ (R-r)F_0 = \frac{3}{2} MRa_c \end{cases}$$

La soluzione del sistema è molto semplice, e fornisce:

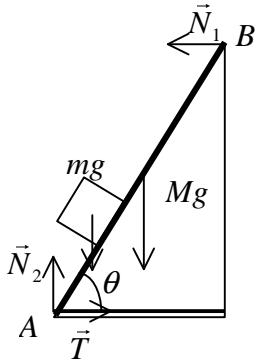
$$\begin{cases} a_c = \frac{2}{3} \frac{R-r}{MR} F_0 \\ F_a = \frac{2r+R}{3R} F_0 \end{cases}$$

Problema 12

Un bambino di massa m si sposta lungo una scala a pioli di massa M e lunghezza L . Non c'è attrito su entrambe le estremità della scala, che è trattenuta in basso da una corda ideale orizzontale che si spezza oltre una tensione massima T_{max} (figura).

- a) Qual è la tensione della corda quando il bambino dista $d = L/3$ dall'estremità inferiore della scala?
- b) Qual è la distanza massima d_{max} dall'estremità inferiore della scala che il bambino può raggiungere senza rompere la corda?

Suggerimento: utilizzare le equazioni dell'equilibrio del corpo rigido.



Soluzione:

Equilibrio delle forze e dei momenti delle forze rispetto a B :

$$\begin{cases} N_1 = T \\ N_2 = (m + M)g \\ TL \sin \theta + \left[m(L - d) + M \frac{L}{2} \right] g \cos \theta = N_2 L \cos \theta \end{cases}$$

a) La tensione della fune si trova risolvendo il sistema scritto sopra:

$$T = \left(m \frac{d}{L} + \frac{M}{2} \right) g \cot \theta$$

b) Basta uguagliare a T_{max} la tensione della fune trovata in a) e risolvere in d_{max} :

$$d_{max} = \left(\frac{T_{max}}{mg \cot \theta} - \frac{M}{2m} \right) L$$

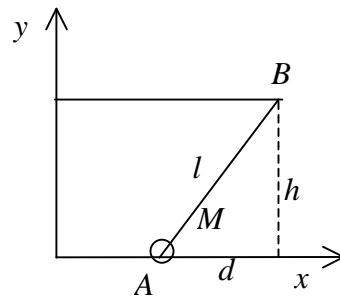
Problema 13

Un cavo ideale orizzontale (figura) sostiene un'asta uniforme, di lunghezza l e massa M , incernierata in A e con l'estremo B ad altezza h sopra A .

- a) Quanto vale la tensione del cavo?
- b) Se il cavo viene tagliato, quanto vale l'accelerazione angolare dell'asta nell'istante in cui il cavo viene tagliato?
- c) Quanto vale la velocità angolare dell'asta quando essa raggiunge la posizione orizzontale?

[$M = 50 \text{ kg}$; $l = 5 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$]

Suggerimento: il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse passante per l'estremità è: $I = \frac{1}{3}Ml^2$.



Soluzione:

- a) Equilibrio dei momenti rispetto ad A:

$$Mg \frac{d}{2} = Th$$

cioè:

$$T = Mg \frac{d}{2h} = 184 \text{ N}$$

- b) Momento d'inerzia dell'asta rispetto ad A:

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

L'accelerazione angolare è data da:

$$\alpha = \frac{M^{(E)}}{I}$$

Accelerazione angolare iniziale:

$$\alpha = Mg \frac{d}{2I} = \frac{3gd}{2l^2} = 1.8 \text{ rad/s}^2$$

c) Conservazione dell'energia meccanica:

$$mg \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2$$

Velocità angolare quando l'asta tocca terra:

$$\omega = \sqrt{\frac{3gh}{l^2}} = 2,2 \text{ rad/s}$$