IV - Conservazione della quantità di moto; sistemi a più corpi ed urti

Per una particella si definisce quantità di moto la grandezza:

$$\vec{p} = m\vec{v} \ .$$

La seconda legge della dinamica, nella sua forma più generale, si scrive:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

dove $\vec{F}$ è la forza totale agente sulla particella.
L'impulso di una forza che agisce per breve tempo su una particella (forza impulsiva) si definisce come:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p},$$

cioè l'impulso di una forza impulsiva è uguale alla variazione della quantità di moto della particella.
Per un sistema di particelle o per un corpo esteso (distribuzione continua di materia) il centro di massa (*CM*) si definisce come:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \ , \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \ , \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}$$

dove m_i è la massa dell'i-esima particella di coordinate (x_i, y_i, z_i) in un sistema di riferimento inerziale ed M è la massa totale del sistema.
Oppure, nel caso di un corpo esteso:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_M xdm \ , \qquad y_{CM} = \frac{1}{M}\int_M ydm \ , \qquad z_{CM} = \frac{1}{M}\int_M zdm$$

Il teorema del centro di massa (o 1^a equazione cardinale della dinamica dei sistemi) è scritto come:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$$

ossia il centro di massa si muove come una particella singola di massa M sulla quale agisce la stessa forza esterna risultante $\vec{F}^{(E)}$.
Per un sistema di particelle, la quantità di moto totale è:

$$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$$

Il teorema del centro di massa si può scrivere anche:

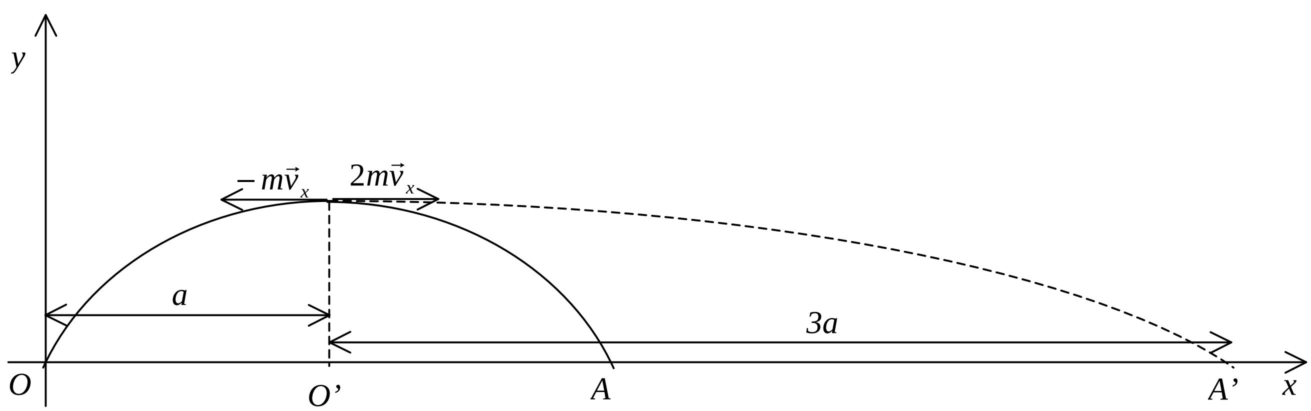
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$

Quando la forza risultante esterna per un sistema è zero (sistema isolato), la quantità di moto totale resta costante (legge di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato).
La legge di conservazione della quantità di moto è molto utile nel trattare la classe di fenomeni noti come urti.
In un'urto, due o più corpi interagiscono tra loro per un tempo molto breve con una forza molto grande rispetto alle altre, sicchè si può considerare il sistema isolato. Pertanto negli urti la quantità di moto totale si conserva. Anche l'energia totale si conserva, ma questa conservazione può non essere utile a risolvere il problema se avvengono trasformazioni di energia da cinetica a non cinetica.
Un urto che conserva l'energia cinetica totale del sistema prende il nome di urto elastico.
Invece, un urto che non conserva l'energia cinetica totale del sistema si dice anelastico.
Se a seguito dell'urto i due corpi restano attaccati tra loro, formando un corpo unico, l'urto si dice completamente anelastico.

Problema 1

Un proiettile di massa 2*m*, lanciato dal suolo con una certa angolazione, quando raggiunge l'apice della traiettoria esplode in due frammenti di egual massa *m*.
Sapendo che uno dei due frammenti torna al punto di partenza ripercorrendo la traiettoria iniziale, determinare la posizione in cui cade l'altro e stabilire se essi toccano o meno terra nello stesso istante.

Suggerimento: la quantità di moto si conserva.



Soluzione:

Il moto del centro di massa del sistema delle due parti in cui si è diviso il proiettile è la continuazione del moto del proiettile integro. I due frammenti toccano terra nello stesso istante perchè la componente verticale del moto è la stessa per entrambi. Detta v_x la componente orizzontale della velocità del

proiettile, nel punto culminante la sua quantità di moto è orizzontale e vale $2mv_x$.La velocità del frammento che torna indietro, nell'istante dell'esplosione, è - v_x quindi la sua quantità di moto vale -mv_x, e quella dell'altro frammento deve essere 2 mv_x -(- mv_x) = 3 mv_x. Quindi il secondo frammento parte con velocità 3 v_x.
Detto t il tempo di volo, il frammento che torna al punto di partenza percorre la distanza:

$$O'O = v_x t = a$$

mentre il frammento che prosegue percorre:

$$O'A' = 3v_x t = 3a$$

ed il centro di massa:

$$O'A = v_x t = a$$

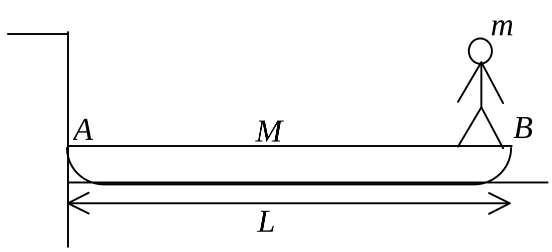
Il frammento che prosegue cade dunque in *A'* con ascissa 4*a*.

Problema 2

Una chiatta di massa *M* e lunghezza *L* è ferma in acqua tranquilla, senza alcun ancoraggio, con un estremo *A* a contatto con la parete del molo (figura). In questa situazione un uomo di massa m sta sulla chiatta all'altezza del suo estremo opposto *B*. Ad un certo punto l'uomo comincia a camminare ed arriva all'estremo *A*, dove si ferma. Se si trascura l'attrito della chiatta sull'acqua, di quanto si allontana l'estremo *A* dal molo?

[*M* = 150 kg; *L* = 5 m; *m* = 75 kg]

Suggerimento: lo spostamento della barca rispetto alla banchina è uguale a quello del centro di massa rispetto alla barca



Soluzione 1:

Poichè il sistema è isolato, la quantità di moto totale rimane nulla, vale a dire che il centro di massa rimane fermo, rispetto alla banchina. L'ascissa del centro di massa soddisfa inizialmente a:

$$x_{CM} = \frac{Mg\frac{L}{2} + mgL}{(m+M)g} = \frac{L(M+2m)}{2(M+m)}$$

Detta *x* l'ascissa finale di *A*, l'ascissa del centro di massa soddisfa (alla fine):

$$x_{CM} = \frac{xmg + Mg\left(\frac{L}{2} + x\right)}{(m+M)g} = \frac{x(m+M) + M\frac{L}{2}}{m+M} = x + \frac{M\frac{L}{2}}{m+M}$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ottiene:

$$\frac{mL + M\frac{L}{2}}{m+M} = x + \frac{M\frac{L}{2}}{m+M}$$

cioè:

$$x = \frac{mL}{m+M} = 1{,}67 \text{ m}$$

Soluzione 2:

Si ricordi che il sistema è isolato (soluzione 1).
Posto:

$\vec{v}_1$ = velocità dell'uomo rispetto alla banchina (massa *m*)

$\vec{v}_2$ = velocità della barca rispetto alla banchina (massa *M*)

vale:

$$M\vec{v}_2 + m\vec{v}_1 = 0$$

cioè:

$$v_2 = -\frac{m}{M}|v_1|$$

Lo spazio percorso dall'uomo è:

$$|x_1| = |v_1|t$$

Lo spazio percorso dalla barca è:

$$x_2 = \frac{v_2}{|v_1|}|x_1| = \frac{m}{M}|x_1|$$

ma

$$|x_1| + x_2 = |x_1| + \frac{m}{M}|x_1| = L$$

Quindi:

$$|x_1| = L\frac{M}{M+m} = 3{,}33 \text{ m.}$$

La posizione dell'uomo rispetto alla banchina è:

$$L - |x_1| = 1{,}67 \text{ m.}$$

Soluzione 3:

Dette v la velocità (negativa) dell'uomo (che ha massa m) e V la velocità della barca(di massa M) rispetto alla banchina, vale:

$$MV + mv = 0$$

Ma, detta v_r la velocità dell'uomo relativa alla barca, è:

$$v = v_r + V$$

Quindi:

$$m(v_r + V) = -MV$$

$$v_r = -V\frac{m+M}{m}$$

Nel tempo t in cui l'uomo percorre L con velocità relativa alla barca v_r, il centro di massa della barca si sposta di x (distanza finale di A dalla banchina):

$$\frac{L}{t} = \frac{x}{t}\frac{M+m}{m}$$

Quindi:

$$x = L\frac{m}{M+m} = 1{,}67 \text{ m.}$$

Problema 3

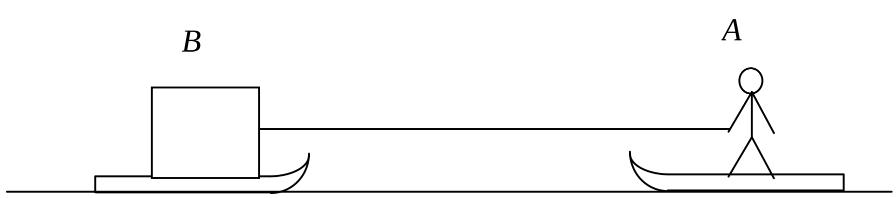
Un bambino, in piedi su una slitta *A* di massa m_A, avvicina a se' una seconda slitta *B* di massa m_B tirandola mediante una fune di massa trascurabile fissata alla slitta *B*. Le due slitte, inizialmente ferme, si muovono su un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico μ_d tra slitte e suolo.

Qual è l'accelerazione a_{CM} del centro di massa del sistema formato dalle due slitte?

Se in un riferimento inerziale l'accelerazione a_B della slitta *B* è in modulo doppia dell'accelerazione a_A della slitta *A*, quanto vale la forza F_{AB} che il bambino esercita sulla fune (tensione della fune)?

[m_A = 50 kg; m_B = 42 kg; μ_d=0,2]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero del sistema slitte-bambino



Soluzione:

a) Equazione del moto del centro di massa:

$$(m_A + m_B)\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$$

con la forza esterna data dalla risultante degli attriti $\vec{F}^{(E)} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$. Quindi:

$$(m_A + m_B)\vec{a}_{CM} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Essendo il problema monodimensionale:

$$(m_A + m_B)a_{CM} = F_A - F_B$$

cioè:

$$a_{CM} = \frac{F_A - F_B}{(m_A + m_B)} = \frac{N_A - N_B}{(m_A + m_B)} \mu_d = 0{,}17 \text{ m/s}^2$$

da *B* verso *A*.

b) Per definizione di centro di massa si può scrivere:

$$(m_A + m_B)\vec{a}_{CM} = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B$$

che, nell'ipotesi $|\vec{a}_B| = 2|\vec{a}_A|$, comporta:

$$(m_A + m_B)a_{CM} = (2m_B - m_A)a_A$$

cioè:

$$a_A = \frac{m_A + m_B}{2m_B - m_A} a_{CM} = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

e:

$$|a_B| = 2|a_A| = 0{,}9 \text{ m/s}^2$$

Note le accelerazioni, lo sono anche le forze:

$$\begin{cases} m_B a_B = F_{BA} - F_B \\ -m_A a_A = F_A - F_{AB} \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} F_{BA} = F_B + m_B a_B \\ F_{AB} = m_A a_A + F_A \end{cases}$$

che fornisce:

$$F_{AB} = F_{BA} = 123{,}5 \text{ N}$$

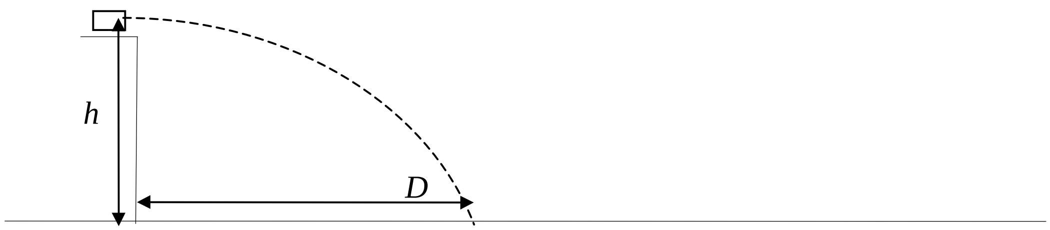
Problema 4

Un cannone di massa *M* spara orizzontalmente, dalla sommità di una torre di altezza *h*, un proiettile di massa *m* e velocità v_0 che raggiunge il suolo ad una distanza *D* dalla base della torre (fig. 1).

Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare in termini di D la forza $\vec{F}$ orizzontale e costante che un sistema di ammortizzatori deve esercitare sul cannone affinchè, per il rinculo, esso arretri di un tratto d prima di fermarsi.

Suggerimento: la quantità di moto si conserva

Soluzione:



Moto del proietto:

$$\begin{cases} D = v_0 t \\ h = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2h}} D$$

La quantità di moto iniziale di rinculo del cannone, per la conservazione della quantità di moto, è $Mv = mv_0$.
L'energia cinetica iniziale del cannone è data dal lavoro compiuto dalla forza costante nel tratto d:

$$Fd = \frac{(mv_0)^2}{2M} = \frac{m^2 g D^2}{4Mh}$$

e la forza è dunque:

$$F = \frac{(mv_0)^2}{2Md} = \frac{m^2 g D^2}{4Mhd}$$

Problema 5

In un incrocio un'automobile A di massa m_A urta un'automobile B di massa m_B. I rilievi della polizia rivelano che, subito prima dell'urto, l'automobile A viaggiava verso est, mentre B era diretta a nord (figura). Dopo l'urto, i rottami delle due auto sono rimasti uniti ed i loro pneumatici hanno lasciato strisciate di slittamento lunghe d in direzione α prima di arrestarsi.

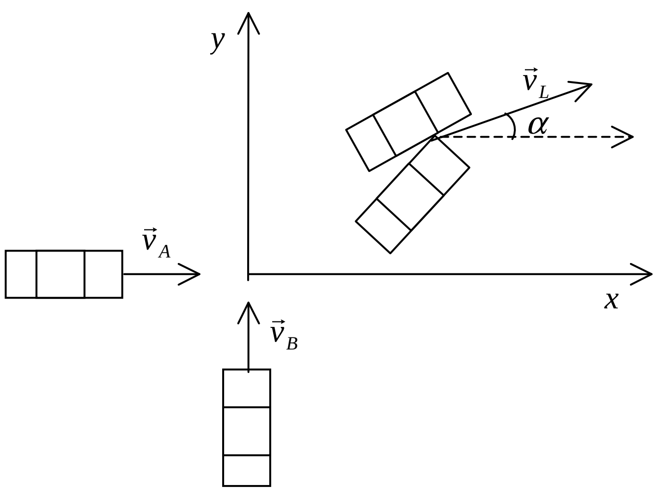
Calcolare le velocità $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ di ciascuna automobile prima dell'urto.

Una delle automobili superava il limite legale di velocità v_L?

Si supponga che le ruote di entrambe le automobili siano rimaste bloccate dopo l'urto e che il coefficiente di attrito dinamico fra le ruote bloccate e la pavimentazione sia μ_d.

[m_A = 1100 kg; m_B = 1300 kg; d = 18,7 m; v_L = 90 km/h; $\alpha = 30°$ da est verso nord; $\mu_d = 0{,}80$]

Suggerimento: la conservazione della quantità di moto è una relazione vettoriale



Soluzione:

a) L'urto è completamente anelastico, per cui la quantità di moto si conserva, mentre l'energia cinetica no.
Il modulo v' della velocità subito dopo l'urto, si calcola dalle strisciate (l'energia cinetica dopo l'urto è stata dissipata dall'attrito):

$$(m_A + m_B) g \mu_d d = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v'^2$$

cioè:

$$v' = \sqrt{2 g \mu_d d} = 17 \text{ m/s}$$

D'altra parte, la conservazione della quantità di moto si scrive (per componenti):

$$\begin{cases} m_A v_A = (m_A + m_B) v' \cos\alpha \\ m_B v_B = (m_A + m_B) v' \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

da cui:

$$v_A = \frac{m_A + m_B}{m_A} v' \cos\alpha = 32{,}3 \text{ m/s} = 116{,}5 \text{ km/h}$$

diretta verso est,

$$v_B = \frac{m_A + m_B}{m_B} v' \operatorname{sen}\alpha = 15{,}8 \text{ m/s} = 56{,}9 \text{ km/h}$$

diretta verso nord.

b) L'auto *A* superava il limite dei 90 km/h.

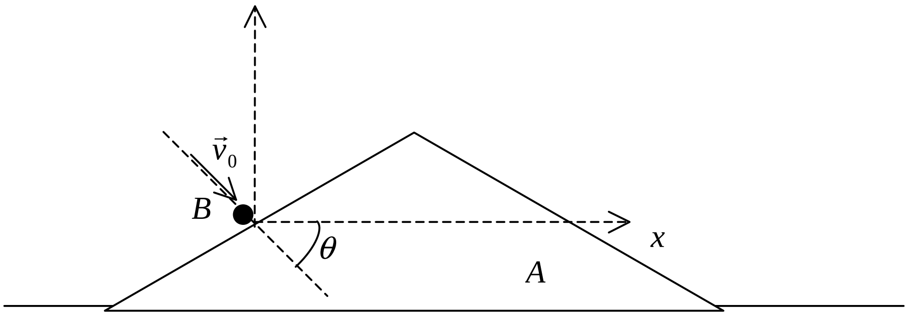
Problema 6

Il corpo *A* mostrato in figura, di massa M_A e struttura prismatica, appoggiato su un piano orizzontale liscio, viene colpito da un corpo puntiforme *B* di massa M_B e velocità $|\vec{v}_0|$. Sapendo che dopo l'urto il corpo *B* rimbalza verticalmente raggiungendo l'altezza *h* rispetto al punto di impatto mentre *A* trasla sul piano di appoggio, si determinino la direzione ed il verso del vettore $\vec{v}_0$.
Si supponga che l'urto sia elastico.

[M_A = 100 kg; M_B = 50 g; $|\vec{v}_0|$ = 5 m/s; *h* = 80 cm]

Suggerimento: la componente orizzontale della quantità di moto si conserva, quella verticale no

y



Soluzione:

In questo problema si conservano la componente orizzontale della quantità di moto e l'energia, per cui, dette v_A e v_B le velocità di A e B subito dopo l'urto, vale:

$$\begin{cases} M_B v_0 \cos\theta = M_A v_A \\ \frac{1}{2} M_B v_0^2 = \frac{1}{2} M_B v_B^2 + \frac{1}{2} M_A v_A^2 \\ \frac{1}{2} M_B v_B^2 = M_B g h \end{cases}$$

ove θ è l'angolo di impatto mostrato in figura, mentre la terza equazione vale per il moto di B dopo l'urto.
Sostituendo la terza equazione nella seconda, si ricava:

$$\begin{cases} M_B v_0 \cos\theta = M_A v_A \\ \frac{1}{2} M_B v_0^2 = M_B g h + \frac{1}{2} M_A v_A^2 \end{cases}$$

e quindi:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{M_B M_A \left(v_0^2 - 2gh\right)}}{M_B v_0} = \sqrt{\frac{M_A \left(v_0^2 - 2gh\right)}{M_B v_0^2}} = 0{,}863$$

$$\theta = 30{,}3°$$