III - Lavoro ed energia.
Conservazione dell'energia.

Il lavoro W compiuto da una forza $\vec{F}$ variabile che agisce su un punto materiale spostandolo da un punto A ad un punto B lungo una linea γ è dato da:

$$W = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

dove $d\vec{l}$ è lo spostamento infinitesimo lungo il percorso della particella.
L'energia cinetica di una particella di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ è data da:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro totale compiuto su un punto materiale dalla forza risultante per spostarlo da un punto A ad un punto B è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale:

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_c$$

Il lavoro fatto da una forza conservativa su di una particella dipende solo dai due punti di partenza e di arrivo e non dal cammino percorso dalla particella. Il lavoro fatto da una forza conservativa è recuperabile, cosa che non è vera per una forza non conservativa, come l'attrito.
Associato ad una forza conservativa si introduce il concetto di variazione di energia potenziale. Sotto l'azione di una forza conservativa $\vec{F}$ si definisce la variazione di energia potenziale come l'opposto del valore del lavoro compiuto dalla forza:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -\int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Solo le variazioni dell'E_p sono significative dal punto di vista della fisica, per cui si può sostituire $E_p(x)$ con $E_p(x) + C$, con C costante arbitraria, ogni volta che conviene.
Quando agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica totale E, definita come la somma delle energie cinetica e potenziale, si conserva:

$$E = E_c + E_p = \text{costante.}$$

Se agiscono anche forze non conservative, entrano in gioco altri tipi di energia. Quando si includono tutte le forme d'energia, l'energia si conserva sempre (legge di conservazione dell'energia).
Esempi di forze conservative per le quali si parla di energia potenziale sono:

forza peso e sua energia potenziale. Quest'ultima vale mgy per una particella posta ad un'altezza y al di sopra di un riferimento orizzontale scelto ad arbitrio.

Forza elastica ($\vec{F} = -k\vec{x}$);energia potenziale elastica $E_p = 1/2kx^2$ per una molla con costante elastica k, allungata o compressa di una lunghezza x rispetto alla posizione di riposo.
Forza gravitazionale (descritta dalla legge di gravitazione universale di Newton).L'energia potenziale di una particella di massa m dovuta alla forza gravitazionale esercitata su di essa dalla Terra è data da:

$$E_p(r) = -\gamma \frac{mM_T}{r}$$

dove M_T è la massa della Terra ed r la distanza della particella dal centro della Terra (r>=raggio della Terra). $E_p(\infty) = 0$ è il riferimento di zero per E_p.

Problema 1

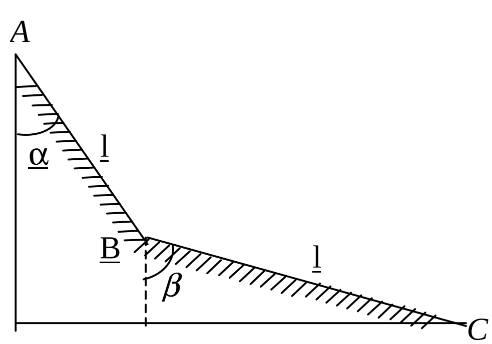
Un punto materiale di massa m scende (partendo da fermo) lungo la sagoma in figura, che è opportunamente raccordata nel punto B in modo che la velocità del punto materiale in B cambi in direzione ma non in modulo. Il coefficiente di attrito dinamico tra punto materiale e piani vale μ_d. Sapendo che la velocità nel tratto BC è costante:

Quanto tempo impiega il punto materiale per scendere da A a C?

Quanto vale il lavoro compiuto dalla forza di attrito?

Risolvere la parte b) sia usando la definizione di lavoro, sia ricordando che il lavoro compiuto dalla forza di attrito è uguale alla variazione dell'energia meccanica tra A e B.

[$AB = BC = l = 2$ m; $\alpha = 30°$; $\mu_d = \frac{1}{\sqrt{3}}$; g = 9,8 m/s^2; $m = 0,5$ kg]



Soluzione:

Innanzi tutto calcoliamo β. Poichè la velocità nel tratto *BC* è costante, la forza di attrito uguaglia la componente del peso parallela a *BC*:

$$\mu_d mg\sin\beta = mg\cos\beta$$

Da cui:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{1}{\mu_d}$$

a) L'accelerazione della massa *m* nel tratto da *A* a *B* è data da:

$$(\cos\alpha - \mu_d \sin\alpha)g = a = 5{,}8 \text{ m/s}^2.$$

Quindi il tempo richiesto da *A* a *B* è:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{(\cos\alpha - \mu_d \sin\alpha)g}} = 0{,}8 \text{ s}$$

mentre in *B* la velocità è: $v_B = at = 4{,}6$ m/s.
Il tempo *t'* impiegato per percorrere *BC* è $l/v_B = 0{,}4$ s, quindi il tempo totale t_t è $t_t = t + t' = 1{,}2$s.

b)Il lavoro compiuto dalla forza di attrito è:

$$W = \mu_d mg(\sin\alpha + \sin\beta)l = 7{,}7 \text{ J}$$

Oppure, il lavoro compiuto dalla forza di attrito si può ottenere dalla variazione dell'energia meccanica:

$$W = \Delta E = mgl(\cos\alpha + \cos\beta) - \frac{1}{2}mv_B^2 = 7{,}7 \text{ J},$$

dove $mgl(\cos\alpha + \cos\beta)$ è l'energia potenziale del punto *A* rispetto al punto *C* .
Si noti che nel tratto *BC* varia solo l'energia potenziale.

Problema 2

Un cavallo tira una slitta su una strada ripida, coperta di neve. La slitta ha una massa *m* ed il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e la neve è μ_d. Se il cavallo tira parallelamente alla superficie della strada ed eroga una potenza *P*:

quanto vale la velocità (costante) massima v_{max} con cui il cavallo riesce a tirare la slitta?

Che frazione della potenza del cavallo viene spesa per compiere lavoro contro la forza d'attrito?

Che frazione viene spesa per compiere lavoro contro la forza di gravità?

[pendenza 1:7; m = 300 kg; μ_d=0,12; P = 746 W]

Soluzione:

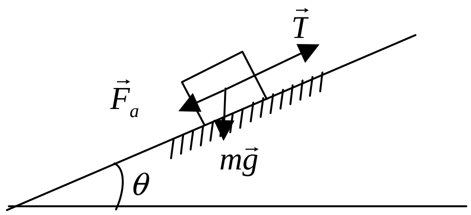


Diagramma di corpo libero

Se la velocità è costante, la tensione T della fune vale:

$$T = \mu_d mg\cos\theta + mg\sin\theta = mg(\mu_d\cos\theta + \sin\theta) = 765 \text{ N}.$$

La potenza P è il prodotto scalare della forza T per la velocità v , che nel nostro caso sono parallele:
$P = Tv = mg(\mu_d\cos\theta + \sin\theta)v_{\max}$
Quindi:
a) v_{max} è:

$$v_{\max} = \frac{P}{mg(\mu_d\cos\theta + \sin\theta)} = 0{,}98 \text{ m/s}$$

b) il rapporto fra la potenza dissipata dall'attrito e quella del cavallo è uguale al rapporto delle forze:

$$\frac{mg\mu_d\cos\theta}{mg\mu_d\cos\theta + \sin\theta} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{tg}\theta}{\mu_d}} = 46\%.$$

il rapporto fra la potenza della gravità e quella del cavallo è:

$$\frac{mg\sin\theta}{mg\mu_d\cos\theta + \sin\theta} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\theta}} = 54\%.$$

Problema 3

Un secchio pieno d'acqua di massa complessiva m_0 viene portato da un pozzo nel mezzo di un cortile fino alla cima di una torre alta h. Essendo però bucato, quando arriva sulla torre contiene solo metà dell'acqua che conteneva inizialmente. Supponendo che la velocità di salita sulla torre e la perdita in massa $\frac{dm}{dt}$ del secchio siano costanti, e che il peso del secchio vuoto possa essere trascurato, determinare il lavoro compiuto esprimendolo in joule.

[m_0 = 3,78 kg; h = 50 m]

Suggerimento:

Si ricordi che, detto x il tratto percorso dal secchio e v la sua velocità,

$$\frac{dm}{dx} = \frac{dm}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dm}{dt} * \frac{1}{v} = \text{costante},$$

per cui $m(x)$ è una funzione lineare.

Soluzione:

Osservato che $m(x)$ è una funzione lineare, con $m(0) = m_0$ e $m(h) = m_0/2$, si ha:

$$m(x) = m_0\left(1 - \frac{x}{2h}\right).$$

Il lavoro è dunque dato da:

$$W = \int_0^h F \cdot dx = \int_0^h gm(x) \cdot dx = m_0 g \int_0^h \left(1 - \frac{x}{2h}\right) \cdot dx$$

Calcolando l'integrale, si trova:

$$W = m_0 g \frac{3}{4} h = 1389{,}2 \text{ J}$$

Problema 4

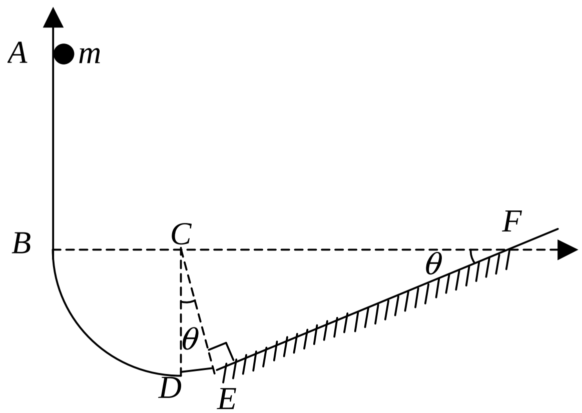
Una guida $ABDEF$ è tenuta in un piano verticale xy. I tratti AB (di lunghezza h) ed EF sono rettilinei, mentre il tratto BDE è circolare, di centro C, raggio R, e angolo al centro $\pi/2 + \theta$. Un corpo puntiforme di massa m, in grado di scorrere senza attrito lungo la guida, viene rilasciato nel punto A con velocità iniziale nulla.

Determinare la velocità del corpo nei punti B,D,E,F, supponendo che non vi sia attrito lungo tutta la guida.

Calcolare la reazione della guida nel punto D.

Se il tratto EF presenta un coefficiente di attrito dinamico μ_d, determinare l'energia cinetica del corpo nel punto F.

Perchè le velocità in B ed in F risultano essere uguali nel quesito a)?



Soluzione:

a) Per il teorema dell'energia cinetica, in *B* vale:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgh$$

Quindi la velocità del punto materiale in *B* è:

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Il dislivello fra *A* e *D* è $R + h$, quindi:

$$\frac{1}{2} m v_D^2 = mg(h+R)$$

e:

$$v_D = \sqrt{2g(h+R)}$$

Il dislivello fra *A* ed *E* è $h + R\cos\theta$, quindi:

$$\frac{1}{2} m v_E^2 = mg(h+R\cos\theta)$$

e:

$$v_E = \sqrt{2g(h+R\cos\theta)}$$

Il punto materiale si trova in *F* alla stessa quota che in *B*, per cui ha la stessa energia meccanica (che in assenza di attrito si conserva) e la stessa energia potenziale, quindi anche la stessa energia cinetica e la stessa velocità.

b) La reazione vincolare in *D* deve sia bilanciare per intero il peso del corpo puntiforme, sia fornire la forza centripeta necessaria per mantenere il corpo in traiettoria:

$$\vec{F}_N = \left(mg + \frac{mv_D^2}{R} \right)\hat{y} = \left[mg + m\frac{2g(h+R)}{R} \right]\hat{y}$$

c) Detta *l* la lunghezza di *EF*, l'energia meccanica del punto materiale in *F* è data dall'energia totale in *B* diminuita del lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico lungo *EF* :

$$E_F = \frac{1}{2}mv_B^2 - l\mu_d mg\cos\theta = \frac{1}{2}mv_F^2$$

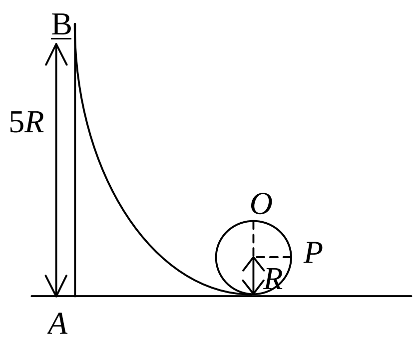
Problema 5

Una massa *m* scivola senz'attrito lungo la guida indicata in figura. Il raggio della circonferenza è *R*.

Se la massa parte da ferma dal punto *B* (*AB* = 5*R*), quanto vale la reazione vincolare nel punto *P*?

Qual è l'altezza minima da cui deve partire la massa affinchè, nella posizione *O*, la reazione vincolare sia nulla?

Quesito: Riscrivere le domande a) e b) supponendo di studiare il problema nel sistema di riferimento non inerziale associato alla massa.



Soluzione:

a) In un riferimento inerziale, la reazione vincolare in *P* deve solamente fornire la forza centripeta che mantiene *m* in traiettoria:

$$F_P = \frac{mv_P^2}{R}$$

Presa come quota di riferimento per l'energia potenziale quella del punto *A*, dalla conservazione dell'energia meccanica si trova:

$$\frac{mv_P^2}{2} = mg5R - mgR = 4mgR$$

Da cui:

$$F_P = 8mg$$

b) In un riferimento inerziale, la reazione vincolare in *O* è nulla se la forza centripeta che mantiene *m* in traiettoria è fornita interamente dalla gravità:

$$mg = \frac{mv_O^2}{R}$$

Detta *x* l'altezza cercata, e sostituendo nell'equazione di conservazione dell'energia ($\frac{mv_O^2}{2} + 2mgR = mgx$):

$$\frac{mgR}{2} + 2mgR = mgx$$

cioè:

$$x = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5}{2}R$$

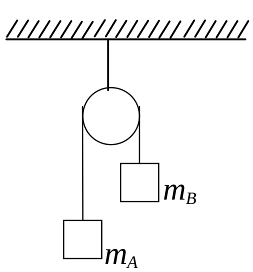
a) Nel riferimento non inerziale solidale con *m*, la reazione vincolare in *P* deve solamente equilibrare la forza centrifuga per mantenere *m* in traiettoria. Ciò porta ad un calcolo identico a quello già svolto, perchè l'unica differenza tra forza centrifuga e centripeta è un segno che non influisce sul calcolo medesimo.

b) Nel riferimento non inerziale solidale con *m*, la reazione vincolare in *O* è nulla se la forza centrifuga agente su *m* è equilibrata interamente dalla gravità. Ancora una volta, e per lo stesso motivo del punto a), il calcolo è identico a quello già svolto nel riferimento inerziale.

Problema 6

Il sistema indicato in figura (macchina di Atwood) è inizialmente a riposo con la massa m_A a terra e la massa m_B ad altezza *h* da terra. Determinare la velocità con cui m_2 tocca terra e la tensione della fune, trascurando l'attrito e l'inerzia della carrucola.

Suggerimento: Questo problema, analogo al n° 7 del capitolo II, può essere risolto utilizzando la legge di conservazione dell'energia meccanica. Per calcolare la tensione della fune è comunque necessario scrivere l'equazione di corpo libero per una delle due masse.



Soluzione:

Equazioni di corpo libero:

$$\begin{cases} m_B g - T = m_B a \\ T - m_A g = m_A a \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si trova l'accelerazione di *A* e *B* (in modulo):

$$a = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} g$$

Quindi la tensione della fune è:

$$T = m_A (a + g) = m_A g \frac{2m_B}{m_B + m_A}$$

Poichè il moto delle due masse è uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, la velocità terminale di *B* è:

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A} gh}$$

Si può determinare *v* anche dalla conservazione dell'energia, osservando che inizialmente le energie cinetiche sono nulle e l'energia potenziale del sistema, rispetto al suolo, è $m_B gh$, mentre alla fine le due masse hanno velocità di ugual modulo:

$$m_B gh = m_A gh + \frac{m_A + m_B}{2} v^2$$

cioè:

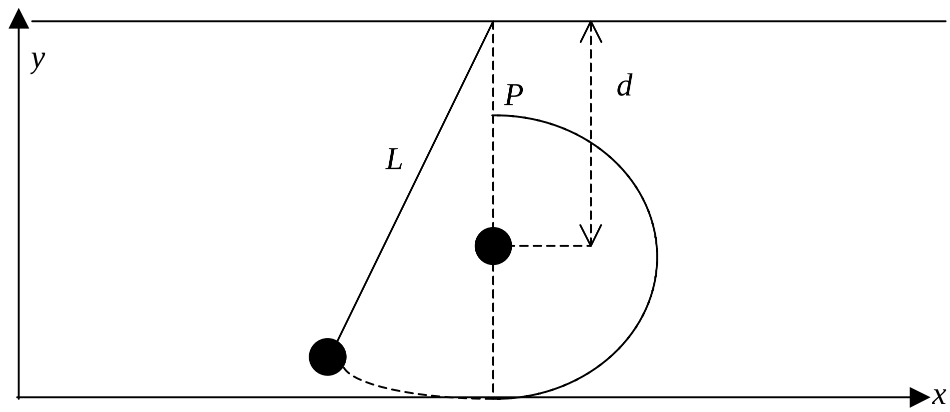
$$v = \sqrt{\frac{2(m_B - m_A)gh}{m_A + m_B}}$$

Problema 7

Un pendolo di lunghezza L oscilla in un piano verticale. La corda urta un piolo fissato ad una distanza d al di sotto del punto di sospensione (vedere figura)

Se il pendolo è lasciato libero da un'altezza h <u>al di sotto</u> del piolo, quale altezza h^* raggiunge dopo aver urtato il piolo?

Se il pendolo è lasciato libero dalla posizione orizzontale ($\theta = 90°$) e descrive una circonferenza completa centrata nel piolo, quale deve essere il valore minimo di d?



Soluzione:

a) Per conservazione dell'energia, $h^* = h$.

b) Conservazione dell'energia nel punto P (figura):

$$mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mv^2$$

In P la forza centripeta deve essere almeno uguale alla gravità:

$$mg = \frac{mv^2}{L-d}$$

quindi:

$$mgL = mg2(L-d) + \frac{1}{2}mg(L-d)$$

Sviluppando i calcoli:

$$d = \frac{3}{5}L$$

Problema 8

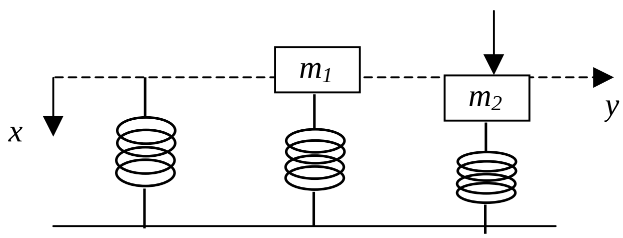
Un estremo di una molla priva di massa è posto su di una superficie piatta, con l’altro estremo che punta verso l’alto(vedi fig. 1a). Una massa m_1 è posta delicatamente sopra la molla e permette di comprimere la molla di x_1 , ad una nuova posizione di equilibrio (fig. 1b). Successivamente, la massa m_1 viene rimossa e sostituita con una massa m_2. La molla è poi compressa con le mani cosicchè l’estremo della molla si trova in una posizione x_2 rispetto alla posizione originale di riposo (quella occupata dalla molla senza nessuna massa appoggiata)(vedi fig. 1c). La molla è poi rilasciata.

Quanto vale la costante k della molla?

Qual è la massima energia cinetica della massa?

[m_1 = 1,0 kg; m_2 = 2,0 kg; x_1 = 17 cm; x_2 = 42 cm]

Quesito: risolvere il problema sia scrivendo l’equazione del moto del punto materiale, sia scrivendo la conservazione dell’energia meccanica.



Soluzione:

a) Riferita l’energia potenziale gravitazionale all’asse delle ascisse (figura), la costante elastica della molla vale:

$$k = \frac{m_1 g}{x_1} = 57{,}6 \text{ N/m}$$

b) Per conservazione dell’energia, la massima energia cinetica della massa m_2 corrisponde alla minima energia potenziale. L’energia potenziale ha un andamento parabolico:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - m_2 gx \quad = \frac{m_1 g}{2x_1}x^2 - m_2 gx$$

Questa parabola ha il vertice in:

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{m_2 g}{k} = \dfrac{m_2 x_1}{m_1} \\ E_{p\,\min} = \dfrac{m_2^2 g}{2m_1}x_1 - \dfrac{m_2^2 g}{m_1}x_1 = -\dfrac{m_2^2 g}{2m_1}x_1 \end{cases}$$

L’energia totale è data da:

$$E_{c\,\max} = E_{mecc} - E_{p\,\min} = E_{piniz} - E_{p\,\min}$$

quindi l’energia cinetica massima è:

$$E_{c\,\max} = \frac{1}{2}kx_2^2 - m_2 g x_2 + \frac{m_2^2 g}{2m_1}x_1 = \frac{m_1 g}{2x_1}x_2^2 - m_2 g x_2 + \frac{m_2^2 g}{2m_1}x_1 = 0{,}2\ \text{J}$$

Il problema può essere risolto anche utilizzando direttamente l’equazione del moto:

$$m_2\ddot{x} + kx = m_2 g$$

La soluzione generale è:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi) + \frac{m_2 g}{k}$$

(si noti che $x^* = \frac{m_2 g}{k}$ è la soluzione di equilibrio dell’equazione del moto, mentre $A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$ è l’oscillazione generica: la molla oscilla attorno alla posizione di equilibrio x^* anzichè attorno ad $x = 0$).
Imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = A\,\text{sen}\,\phi + \frac{m_2 g}{k} = x_2 \\ v(0) = \omega A\cos\phi = 0 \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_2 - \frac{m_2 g}{k}\right)\cos\omega t + \frac{m_2 g}{k} \\ v(t) = -\omega\left(x_2 - \frac{m_2 g}{k}\right)\text{sen}\,\omega t \end{cases}$$

ove:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

La velocità è massima per sen ω t=1 o – 1, cioè quando l’energia cinetica vale:

$$E_c = \frac{1}{2}m_2\omega^2\left(x_2 - \frac{m_2 g}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(x_2 - \frac{m_2 g}{k}\right)^2 = 0{,}2\ \text{J}$$