II - Dinamica del punto

Le tre leggi del moto di Newton sono le leggi fondamentali per la descrizione del moto stesso.

La **prima legge di Newton** afferma che, se la forza risultante su un corpo puntiforme è zero, allora esso resta in quiete o si muove lungo una linea retta con velocità costante (moto rettilineo uniforme). La tendenza di un corpo a resistere ad un cambiamento del suo stato di moto si chiama inerzia. La massa è la misura dell'inerzia di un corpo.

La **seconda legge del moto di Newton** afferma che l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante che agisce su di esso e inversamente proporzionale alla sua massa. Sotto forma di equazione:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La forza risultante su un oggetto indica il vettore somma di tutte le forze che agiscono su di esso.
Nella sua formulazione più generale, la seconda legge di Newton afferma che la forza risultante agente su un corpo di massa *m* e velocità $\vec{v}$ è data da:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

ove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto del corpo.
Solitamente (ma ci sono eccezioni) un corpo non perde nè acquista massa durante il moto, e quindi vale $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$, come sopra.
Se invece la massa del corpo è variabile, si avrà:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

La **terza legge del moto di Newton** afferma che se un primo corpo esercita una forza su un secondo corpo, allora il secondo corpo esercita sempre sul primo una forza uguale in intensità e direzione, ma di verso contrario.

La forza esercitata su un corpo dalla <u>superficie liscia</u> su cui è appoggiato agisce perpendicolarmente alla comune superficie di contatto e per questo si dice che è una forza normale. E' un tipo di forza vincolare, perché limita la libertà di movimento del corpo e la sua intensità dipende dalle altre forze che agiscono su quel corpo.

Per risolvere i problemi in cui compaiono forze su uno o più corpi è essenziale disegnare il diagramma di corpo libero per ogni singolo corpo, mettendo in evidenza tutte le forze che agiscono su quel corpo. Per ogni corpo la seconda legge di Newton può essere applicata a ciascuna componente della forza risultante.

Alcune forze importanti sono:

Forza peso. Il peso si riferisce alla forza di gravità che agisce su un dato corpo e vale $P = mg$; vettorialmente: $\vec{P} = -m\vec{g}$

Forza d'attrito. Quando un corpo è in movimento su una superficie scabra, la forza dovuta all'attrito (radente) dinamico agisce nella direzione opposta a quella del moto. La sua intensità è data da: $F_{ad} = \mu_d F_N$, relazione tra l'intensità della forza d'attrito, che agisce parallelamente alla superficie di contatto e l'intensità della forza normale F_N (spesso indicata anche con N) che agisce perpendicolarmente alla superficie stessa. Non è un'equazione vettoriale, poiché le due forze sono perpendicolari l'una all'altra. μ_d è detto coefficiente di attrito dinamico e dipende dai materiali con cui sono fatti i due oggetti. Per la forza d'attrito (radente) statico, il suo valore massimo è dato da: $F_{as} = \mu_s F_N$ con μ_S coefficiente d'attrito statico. Quando un corpo si muove con velocità sufficientemente bassa attraverso un fluido, subisce una forza d'attrito viscoso diretta nel verso opposto a quello del moto. La sua intensità è data da: $F_{av} = -\beta v$.

Forza elastica. Per tenere una molla compressa o tesa di una lunghezza x oltre quella di riposo è necessaria una forza:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

dove k è la costante elastica della molla. Questa legge, nota come legge di Hooke, è valida per valori di x sufficientemente piccoli.

Forza centripeta. Una particella che ruota lungo una circonferenza di raggio r con velocità costante v è sottoposta in ogni momento ad una forza diretta verso il centro della traiettoria. Essa vale:

$$F = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r\text{; vettorialmente } \vec{F} = -m\frac{\vec{v}^2}{r}\hat{r} = m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Problema 1

Un uomo tira una slitta, inizialmente ferma, su cui siedono due bambini, sul suolo coperto di neve. La slitta viene tirata mediante una fune che forma un angolo θ con l'orizzontale (vedi figura). La massa totale dei bambini è M, mentre quella della slitta è m. Il coefficiente di attrito statico è μ_S, mentre il coefficiente di attrito dinamico è μ_d.
Si trovino la forza di attrito esercitata dal suolo sulla slitta e l'accelerazione del sistema slitta-bambini se la tensione $\vec{T}$ della fune ha l'intensità:

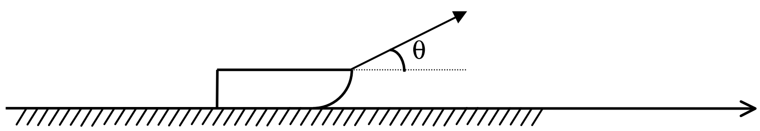
$T = 100\ N$;

$T = 140\ N$.

Mantenendo fisso l'angolo θ , determinare il valore minimo di T per sollevare totalmente la slitta.

[$\theta = 40^0$; M = 45 kg; m = 5 kg; μ_s = 0,20; μ_d = 0,15]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero del sistema slitta-bambini, imporre la condizione di equilibrio per le componenti y delle forze e scrivere l'equazione del moto per le componenti x.



Soluzione:

<u>Diagrammi di corpo libero</u>

I) La forza normale al suolo è:

$$F_N = (M + m)g - T\sin\theta \ = 425{,}7\ N.$$

Quindi la forza di attrito statico è:

$$F_{as} = \mu_s F_N = \mu_s \left[(M + m)g - T\sin\theta\right] = 85{,}1\ N,$$

mentre la forza di attrito dinamico è:

$$F_{ad} = \mu_d F_N = \mu_d \left[(M + m)g - T\sin\theta\right] = 63{,}9\ N.$$

La componente orizzontale delle tensioni è $T_x = T\cos\theta$ = 76,6 N < F_{as}, per cui l'accelerazione è nulla.

II) La forza normale al suolo è:

$$F_N = (M + m)g - T\sin\theta \ = 400\ N.$$

Quindi la forza di attrito statico è:

$$F_{as} = \mu_s F_N = \mu_s \left[(M+m)g - T\sin\theta \right] = 80\ N,$$ mentre la forza di attrito dinamico è:

$$F_{ad} = \mu_d F_N = \mu_d \left[(M+m)g - T\sin\theta \right] = 60\ N.$$

La componente orizzontale delle tensione è $T_x = T\cos\theta = 107{,}2\ N > F_{as}$, quindi la slitta si muove con accelerazione

$$a = \frac{T\cos\theta - \mu_d \left[(M+m)g - T\sin\theta \right]}{M+m} = 0{,}9\ m/s^2.$$

Il valore di T per sollevare la slitta è quello che annulla $\vec{F}_N$:

$$T = \frac{(M+m)g}{\sin\theta} = 762{,}3\ \text{N}.$$

Problema 2

Due masse m_1 ed m_2 giacciono su un piano senza attrito e vengono spinte da una forza applicata dall'esterno $\vec{F}_1$, che si esercita sulla massa m_1 (come in figura 1).

Si determinino intensità e direzione di ciascuna delle forze di interazione tra m_1 ed m_2.

Supponendo che venga eliminata la forza $\vec{F}_1$ e che sulla massa m_2 agisca la forza applicata dall'esterno $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (figura 2), si determinino intensità e direzione di ciascuna delle forze di interazione in quest'ultimo caso.

Si spieghi perché il modulo delle forze di interazione è diverso nei due casi.

[$F_1 = 12\ N$; $m_1 = 4\ kg$; $m_2 = 2\ kg$; $F_2 = 12\ N$]

Suggerimento: si scriva l'equazione del moto considerando il punto materiale di massa ($m_1 + m_2$). Si scrivano quindi le equazioni di corpo libero per ciascuna massa.

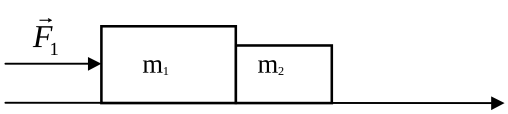


Fig. 1

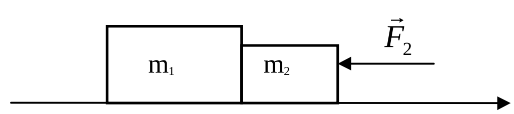
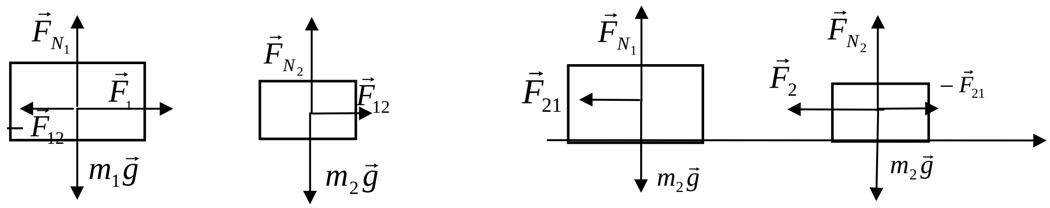


Fig. 2

Soluzione:



<u>Diagrammi di corpo libero</u>

a) L'accelerazione di m_1 ed m_2 è:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m_1 + m_2} = 2\ m/s^2$$

Ma allora la forza di interazione F_{12} esercitata da m_1 su m_2 vale $m_2\, a$ = 4 N, mentre per il principio di azione e reazione la forza di interazione F_{21} esercitata da m_2 su m_1 vale $F_{21} = - F_{12}$ = 4 N

b) L'accelerazione vale ancora 2 m/s^2, ma questa volta su m_2 agisce anche la forza $F_2 = - F_1$.
quindi ora è $F_{21} = m_1 a$ = -8 N, ed $F_{12} = - F_{21}$ = 8 N.

c) In base alla seconda legge del moto di Newton la forza <u>totale</u> agente su ciascuna delle due masse è la stessa (a meno del verso) nei due casi esaminati. Però una delle due masse è accelerata dalla sola forza di interazione, e nel secondo caso si tratta della massa maggiore. E' ovvio che per produrre la stessa accelerazione in una massa maggiore, occorre una forza maggiore.

Problema 3

Una palla di massa *m* è fissata ad una sbarra verticale per mezzo di due funi prive di massa e lunghe ℓ. Le funi sono fissate alla sbarra a distanza *d* l'una dall'altra. Il sistema ruota attorno alla sbarra in modo da formare un triangolo equilatero (vedi figura). La tensione della fune più alta è $\vec{T}_1$. Determinare:

la tensione $\vec{T}_2$ della fune in basso;

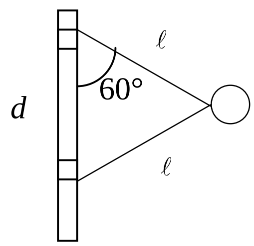
la risultante delle forze applicate alla palla nell'istante mostrato in figura;

la velocità della palla.

Studiare il problema sia dal punto di vista di un osservatore inerziale, sia dal punto di vista di un osservatore solidale con la palla.

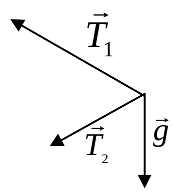
[m = 1,34 kg; ℓ = 1,70 m; d = 1,70 m; T_1 = 35,0 N]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero per il punto materiale in ciascuno dei riferimenti utilizzati.



Soluzione:

La differenza fra ciò che vede un osservatore inerziale rispetto ad uno non inerziale solidale con la palla è che mentre quest'ultimo vede la palla ferma mantenuta in equilibrio da una forza **centrifuga** $\vec{F}_{c.f.}$, l'osservatore inerziale vede la palla in moto circolare uniforme, sottoposta ad un'accelerazione **centripeta**.



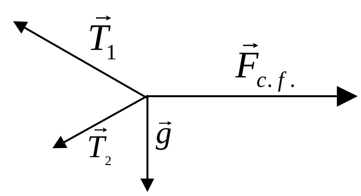


Diagramma di corpo libero a) nel riferimento inerziale e b) nel riferimento non inerziale solidale con la palla

a) Nel riferimento non inerziale, la tensione $\vec{T}_2$ bilancia la risultante di $\vec{T}_1$, della forza centrifuga e della forza peso:

$$\vec{T}_2 + \vec{T}_1 + m\frac{v^2}{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}\hat{r} + m\vec{g} = 0$$

dove si è tenuto conto che il triangolo è equilatero e che $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
La componente verticale dell'equazione non contiene la forza centrifuga:

$$\frac{T_2}{2} = \frac{T_1}{2} - mg$$

dove si è utilizzata la nota relazione cos 60° = 0,5. Si trova dunque il modulo T_2 = 8,7 N.

b) Nel riferimento non inerziale la risposta è banale: zero.
Nel riferimento inerziale, invece, la risultante delle forze applicate alla palla è la forza centripeta:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = -\frac{mv^2}{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}\hat{r}$$

La componente orizzontale dell'equazione vettoriale di partenza, valida in entrambi i riferimenti, è:

$$(T_1 + T_2)\ell\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{mv^2}{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

fornisce:

$$v = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)\ell\frac{3}{4}}{m}} = 6{,}5 \text{ m/s}$$

Problema 4

Un blocco di massa m_2 poggia su un blocco di massa m_1 che è posto su un tavolo privo di attrito (vedere figura). I coefficienti di attrito statico e dinamico fra i due blocchi sono rispettivamente μ_s e μ_d.

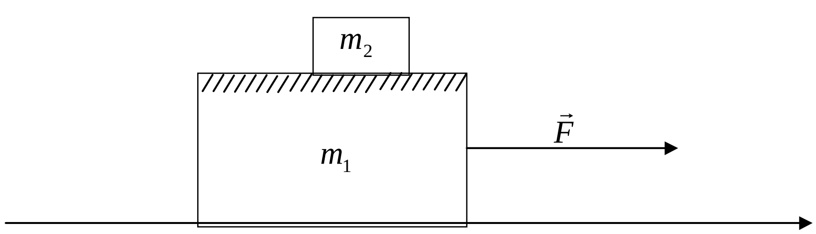
Quanto vale la massima forza $|\vec{F}|$ che si può applicare senza che il blocco m_2 strisci su m_1?

Se il valore di $|\vec{F}|$ è doppio di quello trovato nel precedente quesito, si trovino sia l'accelerazione assoluta di ciascun blocco sia la forza di attrito agente su ciascun blocco.

Un osservatore inerziale vede il blocco m_2 muoversi verso destra (direzione di $\vec{F}$) o verso sinistra?

[m_2 = 2 kg; m_1 = 4 kg; μ_s = 0,3; μ_d = 0,2]

Suggerimento: disegnare il diagramma di corpo libero per ciascun corpo in condizione di moto di m_1 e imporre la condizione di equilibrio di m_2 rispetto ad m_1 (moto relativo).



Soluzione:

Diagrammi di corpo libero (in un riferimento inerziale, con m_2 in moto rispetto ad m_1)

a) In un riferimento inerziale, in assenza di attrito con il tavolo la massa m_2 si muove con m_1, quindi la forza di attrito statico che agisce su m_2 deve essere pari a:

$$m_2\mu_s g = \frac{Fm_2}{m_1+m_2}$$

da cui:

$$F = \mu_s g(m_1+m_2) = 17{,}7 \text{ N}$$

b) Posto F = 17,7x2 N = 35,4 N, la massa m_2 scivola su m_1 esercitando su di essa la forza di attrito dinamico $F_{ad} = m_2 g\mu_d$, per cui:

$$a_{m_1} = \frac{F - m_2\mu_d g}{m_1} = 7{,}9 \text{ m/s}^2$$

dove a_{m_1} è l'accelerazione della massa m_1.
La forza di attrito dinamico vale naturalmente $m_2\mu_d g = 3{,}9$ N.
Nel riferimento solidale con la massa m_1, la massa m_2 subisce sia la forza di attrito dinamico, sia la forza fittizia -$m_2\, a_{m_1}$. Quindi in tale riferimento l'accelerazione a_r vale:

$$a_r = \mu_d g - a_{m_1} = -5{,}9 \text{ m/s}^2$$

mentre in un riferimento inerziale vale:

$$a = a_r + a_{m_1} = 2 \text{ m/s}^2$$

c) Come si evince dal punto b), mentre nel riferimento non inerziale l'accelerazione è diretta verso sinistra (nel verso negativo delle ascisse), in un riferimento inerziale l'accelerazione è positiva, quindi diretta verso destra.

Problema 5

La curva sopraelevata di un'autostrada è stata progettata per una velocità v_{max}. Il raggio della curva è r. In una brutta giornata il traffico percorre l'autostrada alla velocità v.

Quanto vale l'angolo θ di sopraelevazione?

Quanto deve essere il minimo coefficiente d'attrito μ_s che consente di superare la curva senza scivolare verso il basso?

Usando tale coefficiente, con quale velocità massima v'_{max} è possibile percorrere la curva senza scivolare verso l'alto?

[v_{max} = 95 km/h; r = 210 m; v = 52 km/h]

Suggerimento: utilizzare un sistema di riferimento (non inerziale) solidale con l'automobile, scrivere l'equazione del moto ed imporre la condizione di equilibrio.

Diagramma di corpo libero a) in un riferimento non inerziale e b) in uno inerziale

Soluzione:

a) In un riferimento inerziale la componente orizzontale della reazione vincolare $\vec{N}$ fornisce la forza centripeta, mentre la sua componente verticale equilibra la forza peso:

$$\begin{cases} N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{r} \\ N\cos\theta = mg \end{cases}$$

Quindi:

$$tg\theta = \frac{v_{max}^2}{rg} = 0{,}3$$

Con questo angolo, nel sistema di riferimento solidale con l'automobile è soddisfatta la condizione di equilibrio della componente parallela alla strada delle forze in gioco, in assenza di attrito:

$$m\frac{v_{max}^2}{r}\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$tg\theta = \frac{v_{max}^2}{rg} = 0{,}3$$

b) Con la pioggia, a velocità $v < v_{max}$, la macchina tende a scivolare verso il basso, per cui la condizione di equilibrio diviene:

$$mg\sin(\theta) = m\frac{v^2}{r}\cos(\theta) + \mu_s\left[mg\cos(\theta) + m\frac{v^2}{r}\sin(\theta)\right]$$

Quindi il coefficiente d'attrito vale:

$$\mu_s = \frac{g\,tg(\theta) - \frac{v^2}{r}}{g + \frac{v^2}{r}tg(\theta)} = 0{,}2$$

c) A velocità $v'_{max} > v_{max}$, tende a prevalere la forza centrifuga, e la macchina tende a sbandare verso l'alto.
Quindi la condizione di equilibrio è:

$$mg\sin(\theta) + \mu_s\left[mg\cos(\theta) + m\frac{v'^2_{max}}{r}\sin(\theta)\right] = m\frac{v'^2_{max}}{r}\cos(\theta)$$

Per cui:

$$v'_{max} = \sqrt{gr\frac{[\sin(\theta) + \mu_s\cos(\theta)]}{[\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)]}} = 128{,}5 \text{ km/h}$$

Problema 6

Un corpo di massa M è posto su un piano inclinato di un angolo θ con l'orizzontale ed è connesso ad una coppia di corpi di ugual massa m tramite una corda ideale, che passa per una puleggia senza attrito e di massa trascurabile, come illustrato in figura.
C'è però attrito fra la massa M ed il piano inclinato.

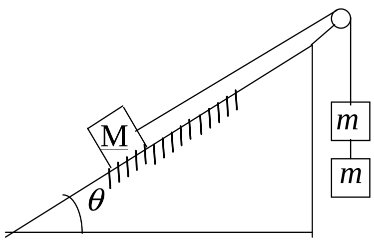
Calcolare il valore della forza di attrito statico necessaria a far rimanere in quiete il sistema;

esprimere in funzione di m, M, θ il minimo valore del coefficiente di attrito statico fra M ed il piano inclinato, μ_s, necessario affinchè il sistema rimanga in condizioni statiche;

calcolare esplicitamente il valore minimo di μ_s quando $m=M/2$ e $\theta=45°$.

Quesito:

Per quale valore dell'angolo θ il sistema (per $m < M/2$) resterebbe in condizioni statiche anche senza attrito?



Soluzione:

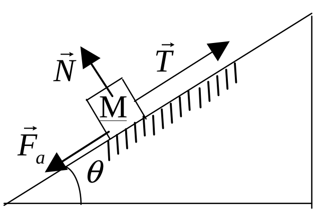


Diagramma di corpo libero per M

a) Condizione di equilibrio:

$$\begin{cases} T = 2mg \\ T = Mg\sin\theta + \mu_s Mg\cos\theta \end{cases}$$

pertanto:

$$\mu_s Mg\cos(\theta) = 2mg - Mg sin(\theta)$$

b) Coefficiente di attrito statico:

$$\mu_s = \frac{2m}{M\cos(\theta)} - tg(\theta)$$

c) Se $m = M/2$ e $\theta = 45°$, μ_s=0,4

Risposta al quesito:

La condizione di equilibrio in assenza di attrito è:

$$\begin{cases} T = 2mg \\ T = Mg sin\theta \end{cases}$$

da cui:

$$\theta = arcsin\frac{2m}{M}$$

Si noti che per $m>M/2$ il sistema non può essere in equilibrio senza l'attrito.

Problema 7

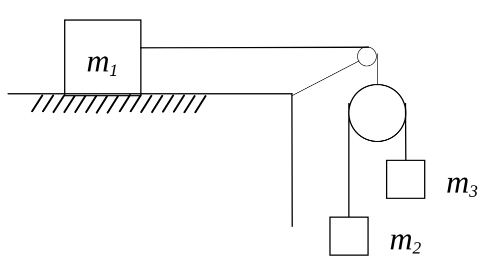
I corpi di massa m_1, m_2 ed m_3 sono collegati come in figura. Le carrucole e le funi sono ideali.
Quali valori può assumere il coefficiente di attrito statico μ_s fra tavolo e corpo di massa m_1 affinchè m_1 non si muova?

Calcolare l'accelerazione dei due corpi m_2 ed m_3 quando è soddisfatta la condizione di cui al punto a).

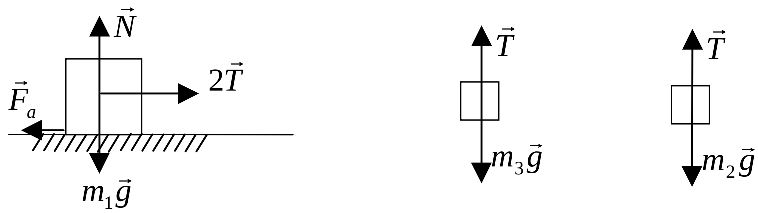
In assenza di attrito fra il tavolo ed m_1, calcolare l'accelerazione dei corpi m_1, m_2 ed m_3.

[m_1 = 10 kg; m_2 = 2 kg; m_3 = 3 kg]

Suggerimento: scrivere l'equazione di equilibrio per m_1 e quella per il moto di m_2 ed m_3.



Soluzione:



Diagrammi di corpo libero.

a) e b) Condizione di equilibrio di m_1:

$$m_1 g \mu_s = 2T$$

Le accelerazioni di m_2 ed m_3 hanno somma nulla, per cui le equazioni del moto di m_2 ed m_3 si possono scrivere in termini della sola accelerazione a di m_3:

$$\begin{cases} T - m_3 g = m_3 a \\ T - m_2 g = m_2(-a) \end{cases} \qquad \text{cioè:} \qquad \begin{cases} T - m_3 g = m_3 a \\ m_2 g - T = m_2 a \end{cases}$$

dove l'asse verticale del riferimento è orientato verso l'alto.
L'accelerazione di m_3 vale:

$$a = \frac{m_2 - m_3}{m_3 + m_2} g = -2 \text{ m/s}^2 \text{ (verso il basso).}$$

Tensione della fune che lega m_2 ed m_3:

$$T = m_3(g + a) = \frac{2m_2 m_3}{m_3 + m_2} g = 23{,}5 \text{ N}$$

Coefficiente di attrito statico:

$$\mu_s = \frac{2T}{g m_1} = 0{,}5$$

c) In assenza di attrito, siano a_1, a_2 e a_3 le accelerazioni delle tre masse in un riferimento inerziale. Vale allora:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = 2T \\ m_2(a_2 + a_1) = T - m_2 g \\ m_3(a_3 + a_1) = T - m_3 g \end{cases}$$

$a_2 + a_1$ e $a_1 + a_3$ sono le accelerazioni delle masse m_2 ed m_3 nel riferimento solidale con la seconda carrucola[1], riferimento in cui è valido il calcolo precedente, nonchè la condizione:

$$a_2 + a_1 = -(a_3 + a_1)$$

che in precedenza ci ha consentito di scrivere le equazioni del moto di m_2 ed m_3 in termini della sola accelerazione di m_3.
Eliminando le tensioni delle corde, si ottiene:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ \left(m_2 - \dfrac{m_1}{2}\right)a_1 + m_2 a_2 = -m_2 g \\ \left(m_3 - \dfrac{m_1}{2}\right)a_1 + m_3 a_3 = -m_3 g \end{cases}$$

Quindi, risolvendo il sistema si trova:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \\ a_2 = \dfrac{m_1(m_3 - m_2) - 4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \\ a_3 = \dfrac{m_1(m_2 - m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_3 + m_2)} g \end{cases}$$

$a_1 = 4{,}7\ \mathrm{m/s^2}$, $a_2 = -2{,}7\ \mathrm{m/s^2}$, $a_3 = -6{,}7\ \mathrm{m/s^2}$ (m_1 si muove in avanti, m_2 ed m_3 verso il basso).
Si noti che nel riferimento non inerziale solidale con la carrucola mobile (che scende), le accelerazioni di m_2 ed m_3 hanno lo stesso modulo ($2\ \mathrm{m/s^2}$), ma m_3 scende ed m_2 sale.

Problema 8

---

[1] Si ricordi che se $\vec{a}_I$ è l'accelerazione di un corpo rispetto ad un riferimento inerziale, la sua accelerazione $\vec{a}_{NI}$ rispetto ad un riferimento non inerziale di accelerazione $\vec{a}_t$ è data da: $\vec{a}_{NI} = \vec{a}_I - \vec{a}_t$.

Nel dispositivo schematizzato in figura, il corpo A (di massa m_A), poggiato su un piano orizzontale liscio, è collegato da un filo inestensibile al corpo B (di massa m_B) ed è saldato all'estremità di una molla di costante elastica k. L'altra estremità della molla è fissata ad un gancio solidale con il piano e le masse del filo, della molla e della carrucola sono trascurabili rispetto a quelle dei corpi A e B. Il corpo B viene abbassato lungo la verticale, rispetto alla sua posizione di equilibrio e lasciato libero di muoversi. Calcolare:

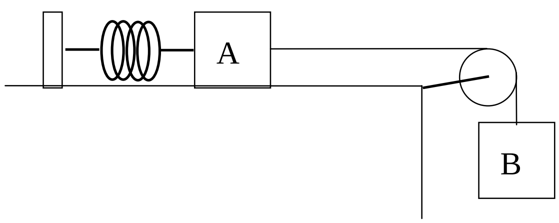
di quanto si è allungata la molla nella posizione di equilibrio del sistema;

l'equazione del moto del sistema formato dalle due masse;

il periodo delle oscillazioni compiute dal sistema (sia di A che di B).

[m_A = 2 kg; m_B = 2 kg; k = 200 N/m]

Suggerimento: si scrivano le equazioni del moto di m_A ed m_B, usando ad esempio la variabile x come spostamento generico della massa m_B dalla sua posizione di equilibrio.



Soluzione:

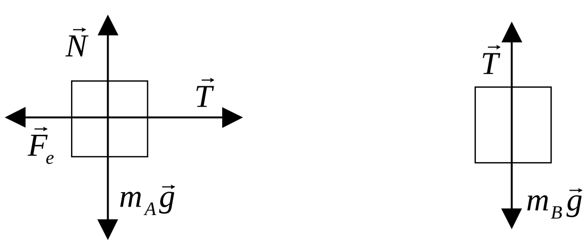


Diagramma di corpo libero per A e B .

a) detto x l'allungamento della molla, la condizione di equilibrio è $k \quad x = m_B g$, da cui:

$$x = \frac{m_B g}{k} = 9{,}8 \text{ cm.}$$

b) le equazioni del moto di ciascuna massa sono:

$$\begin{cases} m_B g - T(x) = m_B a(x) \\ T(x) - kx = m_A a(x) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} m_B g - T(x) = m_B \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ T(x) - kx = m_A \dfrac{d^2 x}{dt^2} \end{cases}$$

per cui l'equazione globale del sistema, in funzione dell'allungamento della molla, è:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m_A + m_B} x = \frac{m_B g}{m_A + m_B}$$

la cui soluzione è un moto armonico. Si noti che la variabile x descrive le oscillazioni sia di m_A che di m_B attorno alle rispettive posizioni di equilibrio.

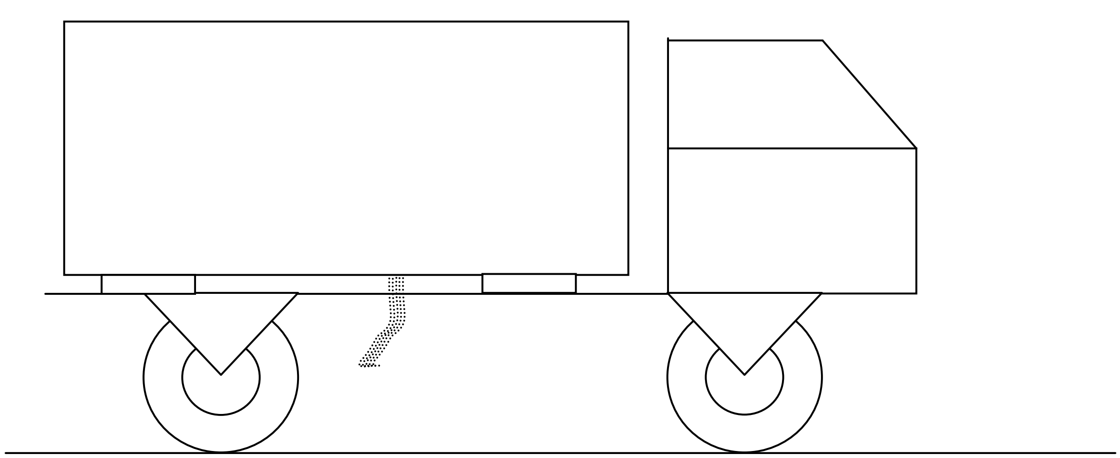
c) il periodo dell'oscillatore è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} = 0{,}9 \text{ s}$$

Problema riepilogativo

Un'autobotte di massa a vuoto M trasporta una massa m_0 di acqua distillata lungo tratto di autostrada piano e rettilineo, senza vento. La velocità dell'autobotte è inizialmente v_0 e la forza di attrito statico agente sulle sue ruote in direzione e verso della velocità è f_s. Ad un tratto sul fondo del cassone si apre una piccola crepa attraverso cui l'acqua cade al suolo, staccandosi dal cassone con velocità relativa ad esso perpendicolare alla strada. La perdita è di k litri di acqua al minuto. L'autista del camion, ignaro della perdita, tiene fermo il piede sull'acceleratore, per cui la forza di attrito statico rimane costante. A quale velocità si troverà il camion dopo un tempo t_0 dall'inizio della perdita?

[f_s = 1 N; m_0 = 32000 kg; k = 1,2 l/min; ρ (H_2O) = 1 kg/dm^3; M = 8000 kg; v_0 = 72 km/h; t_0 = 15']



Soluzione:

Fissiamo un riferimento solidale con la strada che abbia l'asse x lungo l'autostrada nel verso della velocità dell'autobotte, e l'asse y verticale diretto verso l'alto.
Prima che si apra la crepa, si ha semplicemente una massa $M + m_0$ che si muove a velocità costante, soggetta lungo l'asse delle ascisse alle sole forze f_s ed attrito viscoso dell'aria. Queste due forze devono ovviamente bilanciarsi, per cui il coefficiente d'attrito viscoso β del camion nell'aria è dato da:

$$(M + m_0)\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = f_s - \beta v_0$$

cioè:

$$\beta = \frac{f_s}{v_0} = 0{,}05 \text{ kg/s}$$

Quando si apre la crepa, l'autobotte perde, in un intervallo di tempo infinitesimo dt, la quantità di moto v_0kdt e la massa kdt. In formula:

$$(M + m_0 - kdt)v_0(t + dt) - (M + m_0)v_0(t) = -kdtv_0(t)$$

Perciò la nuova velocità dell'autobotte (al tempo $t + dt$) è:

$$\frac{(M + m_0 - kdt)v_0(t)}{(M + m_0 - kdt)} = v_0(t + dt)$$

cioè la velocità rimane inalterata, e l'accelerazione è <u>nulla</u>, anche se il camion <u>perde</u> quantità di moto.

Il problema può anche essere risolto utilizzando la <u>forma generale</u> della seconda legge della dinamica, valida per sistemi a massa variabile:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

dove $m(t)$ è la massa dell'autobotte al tempo t dall'inizio della perdita, e la forza totale agente sull'autobotte è:

$$\vec{F} = (f_s - \beta v)\hat{x} + \vec{f}_a$$

con $\vec{f}_a$ = forza di reazione esercitata dall'acqua sul camion.

Nel riferimento solidale con l'autobotte, la forza di reazione è verticale, per cui non influenza la componente orizzontale del moto. Inoltre, in tale riferimento $v = 0$, quindi:

$$f_s - \beta v = ma$$

(anche a è nulla, ma è solo la forza fittizia).
La condizione iniziale è $f_s - \beta v_0 = 0$, per cui inizialmente $a(0) = 0$. Ma $v(0 + dt) = v_0 + a(0) = v_0$, cioè v non cambia, e $a(0 + dt) = \frac{f_s - \beta v(0 + dt)}{m} = \frac{f_s - \beta v_0}{m} = 0$, vale a dire che a rimane nulla. Quindi il moto resta uniforme con velocità v_0.