

## I - Cinematica del punto materiale

La cinematica degli oggetti puntiformi descrive il moto dei punti materiali.

La descrizione del moto di ogni punto materiale deve sempre essere fatta in relazione ad un particolare sistema di riferimento.

La posizione di un oggetto che si muove lungo una retta è data dall'equazione oraria:

$$x = x(t)$$

Si definiscono la velocità istantanea:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

e l'accelerazione istantanea:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Se un oggetto si muove lungo una retta con accelerazione costante (moto uniformemente accelerato) si ha:

$$a = cost$$

e per integrazione, ponendo  $v = v_0$  e  $x = x_0$  per l'istante iniziale  $t = t_0 = 0$ , si otterrà:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Gli oggetti che si muovono verticalmente vicino alla superficie terrestre, sia che cadano o che siano lanciati verticalmente verso l'alto o verso il basso, si muovono (se si può trascurare l'effetto della resistenza dell'aria) con accelerazione costante rivolta verso il basso. Questa accelerazione è dovuta alla gravità, ed è pari a circa  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

In generale, se  $\vec{r}$  è il vettore posizione del punto materiale, la velocità e l'accelerazione vettoriale istantanea sono date da:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

Le equazioni cinematiche per il moto possono essere scritte per ciascuna delle componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ossia:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \\ \vec{v} &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} \\ \vec{a} &= a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} . \end{aligned}$$

Riassumiamo qui i casi più semplici:

Il moto dei proiettili si può scomporre, se si trascura la resistenza dell'aria, in due moti separati: la componente orizzontale del moto che ha velocità costante e la componente verticale che ha accelerazione costante e pari a  $g$ , come per i corpi in caduta libera (fintanto che il moto si svolge in prossimità della superficie terrestre).

Si ha un moto circolare uniforme quando una particella si muove lungo una circonferenza di raggio  $r$  con velocità costante; la particella sarà allora soggetta ad un'accelerazione radiale centripeta  $a_r$ , diretta verso il centro del cerchio, di intensità:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

Se la velocità non è costante, vi sarà accelerazione sia centripeta sia tangenziale. Il moto circolare può anche essere scritto in termini di variabili angolari. In questo caso l'equazione oraria sarà

$$\theta = \theta(t)$$

con  $\theta$  angolo misurato (in radianti) a partire da una data direzione di riferimento. La velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

e l'accelerazione angolare da:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

La velocità e l'accelerazione lineare di un punto che si muove lungo una circonferenza di raggio  $r$  sono legate a  $\omega$  e  $\alpha$  da:

$$v = r\omega \quad a_\tau = r\alpha \quad a_r = r\omega^2$$

dove  $a_t$  e  $a_r$  sono le componenti tangenziale e radiale dell'accelerazione. La frequenza  $f$  è legata ad  $\omega$  da  $\omega = 2\pi f$  e al periodo  $T$  da  $T = 1/f$ .

### Problema 1

Il sistema, mostrato in figura, è costituito da una massa  $m$  appoggiata su una guida rettilinea inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale.

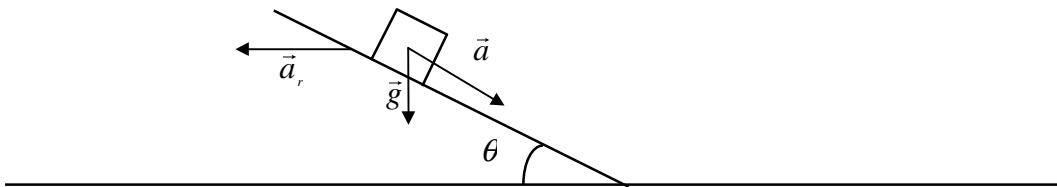
Calcolare l'accelerazione  $\vec{a}_t$  con la quale deve muoversi la guida orizzontalmente affinché la massa  $m$  cada verticalmente con accelerazione pari a  $\vec{g}$ .

$$[\theta = 30^\circ; g = 9.8 \text{ m/s}^2]$$

**Suggerimento:** tenere conto che  $\vec{g}$  è diretta solo verticalmente, mentre  $\vec{a}_t$  è diretta solo orizzontalmente.

**Soluzione:**

L'accelerazione della massa è  $\vec{g}$  rispetto ad un osservatore inerziale, e  $\vec{a}$  rispetto ad un riferimento non inerziale solidale con la guida.



L'accelerazione di gravità nel riferimento solidale con la guida è:

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_t$$

Indicato con  $a$  il modulo dell'accelerazione della massa nel riferimento solidale con la guida vale:

$$a = g \sin\theta + a_t \cos\theta$$

La componente orizzontale di  $\vec{a}$  deve equilibrare  $\vec{a}_t$ , quindi:

$$a_t = a \cos^2 \theta + g \sin\theta \cos\theta$$

cioè:

$$a_t = \frac{g}{\tan\theta} = 5,7 \text{ m/s}^2$$

rivolta all'indietro.

**Soluzione alternativa:**

L'accelerazione totale deve essere  $\vec{g}$ , quindi deve valere:

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{a}_t$$

scrivendo quest'equazione in componenti si ottiene facilmente che:

$$a_t = \frac{g}{\operatorname{tg}\theta} = 5,7 \text{ m/s}^2$$

dove  $a$  e  $g$  sono i moduli delle accelerazioni.

**Problema 2**

Una palla è lanciata in avanti e verso l'alto da una quota  $h_0$  sopra il suolo con velocità iniziale  $\vec{v}_0$ . La palla rimbalza elasticamente (invertendo la componente orizzontale della velocità e mantenendo inalterata quella verticale) su un muro verticale posto alla distanza  $d$  dal lanciatore.

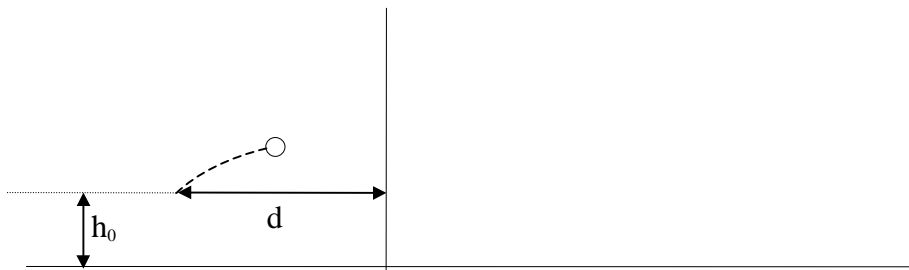
A quale altezza  $h$  dal suolo la palla colpisce il muro?

A quale altezza  $h'$  si trova la palla quando è di nuovo sulla verticale del lanciatore (che rimane fermo)?

Qual è la quota massima  $h_{max}$  raggiunta dalla palla?

*Quesito:*  $h_{max}$  è la stessa che sarebbe raggiunta se non ci fosse la parete verticale. Perché?

$$[h_0 = 2 \text{ m}; d = 4 \text{ m}; \vec{v}_0 = (10\hat{x} + 10\hat{y}) \text{ m/s}]$$



**Soluzione:**

a) La componente orizzontale della velocità  $v_{0x}$  è costante, quindi la palla raggiunge il muro nel tempo:

$$t = \frac{d}{v_{0,x}} = 0,4 \text{ s.}$$

In direzione verticale è l'accelerazione ad essere costante:  $\vec{g} = -9,8 \hat{y} \text{ m/s}^2$ . Perciò:

$$h = h_0 + v_{0,y} \frac{d}{v_{0,x}} - \frac{1}{2} g \left( \frac{d}{v_{0,x}} \right)^2 = 5,2 \text{ m}$$

b) La palla torna sul lanciatore dopo altri 0,4 s.

La componente verticale del moto è ancora uniformemente accelerata con velocità iniziale  $v'_{0,y} = 6,08 \text{ m/s}$ , e quota iniziale  $h'_0 = 5,2 \text{ m}$ .

Perciò la nuova quota è  $h' = 6,9 \text{ m}$ .

c) La quota massima  $h_{max}$  viene raggiunta quando la componente verticale della velocità si annulla (ciò avviene dopo il rimbalzo).

Essa è perciò data da:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} = 7,1 \text{ m.}$$

*Risposta al quesito:*  $h_{max}$  è la stessa che sarebbe raggiunta se non ci fosse la parete verticale, perché l'urto con tale parete non altera la componente verticale del moto.

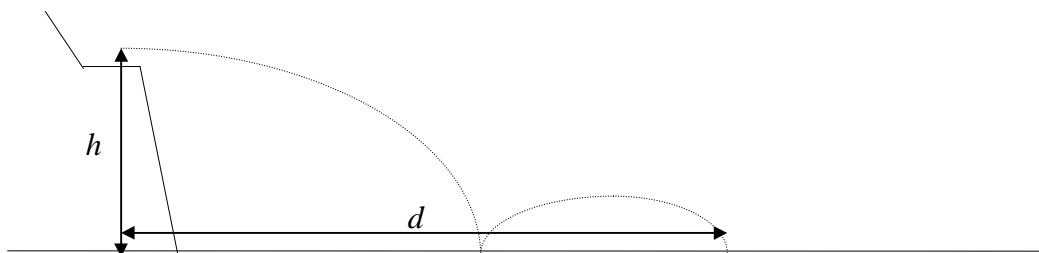
### Problema 3

Un vecchio cannone viene fatto sparare orizzontalmente dalla cima di una montagna e la velocità  $\vec{v}$  della palla viene regolata in modo tale da farle colpire un bersaglio posto nella pianura sottostante solo al secondo rimbalzo. Nel rimbalzo la componente verticale della velocità  $v_{0,y}$  si riduce di un fattore  $f$  e la componente orizzontale  $v_x$  rimane costante.

Qual è la velocità  $v_0$  di uscita della palla del cannone per poter colpire un bersaglio distante  $d$ , se la montagna sulla cui cima è situato il cannone è alta  $h$ ?

Qual è la velocità  $v_0$  di uscita della palla se si vuole colpire il bersaglio direttamente?

[ $f=0,6$ ;  $h = 1 \text{ km}$ ;  $d = 9 \text{ km}$ ]



**Suggerimento:** calcolare la durata del moto in verticale ed ricordare che in tale tempo viene percorsa orizzontalmente la distanza  $d$ .

**Soluzione:**

a) La componente orizzontale del moto si mantiene costantemente uniforme, per cui basta calcolare la durata del moto verticale ed imporre che  $d = v_x t$ , cioè  $v_x = d/t$ .

Il primo impatto avviene dopo il tempo  $t_1$ :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 10\sqrt{2} \text{ s} = 14,1 \text{ s}$$

mentre il secondo impatto avviene con un ritardo  $t_2$ :

$$t_2 = \frac{2v_y}{g} = 12\sqrt{2} \text{ s} = 17 \text{ s},$$

dove  $v_y$  è quella subito dopo l'urto:

$$v_y = g t_1 = 60\sqrt{2} = 84,9 \text{ m/s}.$$

Quindi:

$$v_x = \frac{d}{t_1 + t_2} = 289,3 \text{ m/s}.$$

b) La componente verticale del moto è uniformemente accelerata con accelerazione  $\vec{g} = -9,8 \hat{y} \text{ m/s}^2$ , perciò il tempo impiegato dalla palla per raggiungere il suolo è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

In questo tempo la palla percorre orizzontalmente la distanza  $d = v_x t = 9 \text{ km}$ , cioè:

$$v_x = \frac{d}{t} = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 630 \text{ m/s}.$$